THÈSE DE DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ PARIS 6

Spécialité : Mathématiques

Option : Statistique

présentée par

Jean-Renaud Pycke

Pour obtenir le grade de

DOCTEUR de l'UNIVERSITÉ PARIS 6

Sujet de la thèse :

Un lien entre le développement de Karhunen-Loève de certains processus gaussiens et le laplacien dans des espaces de Riemann.

Soutenue le 11 décembre 2003 devant le jury composé de :

M. Paul DEHEUVELS	Directeur de thèse
M. Yakov NIKITIN	Rapporteur
M. Michel LEDOUX	Examinateur
M. Mikhail NIKULIN	Examinateur
M. Marc YOR	Président du jury

Rapporteurs : Mikhail LIFSHITS, Yakov NIKITIN

Invité : Jean BRETAGNOLLE

Remerciements

Je tiens en premier lieu à remercier mon directeur de thèse Paul Deheuvels. En m'exposant dès notre première rencontre l'idée originale qui est à la base de ce travail, il m'a ouvert les portes d'un domaine des mathématiques encore peu exploré et riche de promesses. Son idée initiale et ses encouragements répétés au fur et à mesure de mes échecs et de mes succés ont été un soutien décisif au cours de ce travail de longue haleine.

Je remercie vivement messieurs Nikulin, Ledoux et Yor ; il me font un grand honneur en acceptant d'être membres du jury. Merci également à Jean Bretagnolle pour les remarques motivantes qu'il m'a adressées, et d'avoir accepté l'invitation à ma soutenance.

Tous mes remerciements à messieurs Lifschits et Nikitin, d'avoir consenti à être rapporteurs, et pour les commentaires qu'ils ont bien voulu faire sur ce travail. Un autre merci à monsieur Nikitin pour avoir accepté en plus de se déplacer pour la soutenance. Les encouragements et les conseils qu'il m'a prodigués depuis sa lecture de ma thèse n'ont fait que confirmer ce mélange de châleur humaine et de rigueur scientifique que m'avaient décrit tous ceux qui le connaissent.

Je remercie M. Pierre-Loti-Viaud qui il y a 4 ans, alors que j'envisageais de me remettre aux mathématiques, m'a encouragé à le faire dans le domaine statistiques. Je remercie aussi particulièrement M. Broniatowski, toujours disponible pour une aide ou un petit conseil. L'atmosphère et le soutien que j'ai trouvés au sein du LSTA m'ont grandement aidé à mener à bien ce long travail. Que M. Bosq en soit remercié, ainsi que toute l'équipe du LSTA.

Merci aussi à Louise Lamart et Pascal Epron pour leur disponibilité quotidienne.

Je remercie tous les étudiants du laboratoire pour les bons moments passés ensemble, en particulier Amor, Fateh, Samy, Alexandre, Anne, Samuela, Omar, Jean-Baptiste, Pierre, Driss, Salim.

Je tiens aussi à saluer Ravan, qui depuis notre rencontre dans un collège du 9-3, m'a toujours aidé par son amitié et son imagination mathématique (entre autre) toujours en ébulition. La vision concrète du Laplacien qu'il m'a exposée un soir chez Chartier a été une source constante d'inspiration. Je salue aussi Christophe, qui s'est joint depuis un an à nos discussions mathématiques du samedi soir.

Merci Gaston pour les revivifiantes vadrouilles en Lorraine !

Merci enfin à ma mère, mon frère Nicolas, son amie Yolanda, d'avoir accepté la lourde tâche de corriger mes fautes d'orthographe.

Merci bien entendu également à Laima, déesse lituanienne du bonheur.

Je dédie ce modeste travail à mon père, parti trop tôt pour le voir, et à celui, ou celle qui va bientôt voir le jour sur les bords du Nil, ainsi qu'à sa future maman, ma soeur Claire. J'éspère que dans une vingtaine d'années, il, ou elle, goûtera ce genre de hiéroglyphes.

L'évidence de cette connaissance défectueuse dont s'enorgueillit la mathématique et dont elle fait parade contre la philosophie, repose entièrement sur la pauvreté de son but et l'imperfection de sa matière ; elle est donc d'une espèce que la philosophie doit dédaigner.

G.W.F. HEGEL

Jamais la statistique n'a rien appris et ne peut rien apprendre sur la nature des phénomènes. Le médecin n'a que faire de ce qu'on appelle la *loi des grands nombres*, loi qui, suivant l'expression d'un grand mathématicien, est toujours vraie en général et fausse en particulier. Cela ne peut jamais rien nous apprendre sur un cas particulier, même de l'aveu des mathématiciens ; car ils admettent que, si la boule rouge est sortie cinquante fois de suite, ce n'est pas une raison pour qu'une boule blanche ait plus de chance de sortir la cinquante et unième fois.

Claude BERNARD.

Dernières paroles :

- La femme infidèle : Pourquoi tiens tu cette hache à la main, mon chéri ?
- Le marathonien : Tiens, une seconde plus tôt je voyais clairement la ligne d'arrivée.
- Deux papillons : - Hé ! N'entre pas dans cette chose rouge. - Pourquoi ? c'est pas une flamme ?
- Le mathématicien : À ton avis, quelle probabilité mathématique y a-t-il pour que cette Fiat apparemment impeccable, que nous voyons rouler vers nous, puisse avoir la direction cassée et monter sur le trottoir ?

István ÖRKÉNY

La statistique est au décideur ce que le réverbère est à l'ivrogne : elle lui sert d'appui, mais ne l'éclaire pas.

ANONYME

Introduction

Ce travail fait suite à une remarque de P. Deheuvels, selon laquelle les fonctions propres du développement de Karhunen-Loève de certains processus gaussiens utiles en statistiques apparaissent également en théorie de la représentation des groupes.

Parmi ces processus, il y a les cas « historiques » du processus de Wiener, du pont brownien et du processus d'Anderson-Darling. Mais certains travaux récents (voir notamment [?], [?], [?], [?] et [?]) ont fourni de nouveaux exemples, tout en annonçant un renouveau de l'intérêt porté aux applications statistiques des développements de Karhunen-Loève.

Notre objectif était donc dans un premier temps, à partir des exemples connus, d'établir un lien possible entre ce domaine et la théorie des groupes. Ensuite et surtout de trouver par ce biais une méthode pour obtenir le développement de nouveaux processus. Tout ceci en ayant en vue les applications statistiques, pour lesquelles seule la connaissance *explicite* des éléments du développement de Karhunen-loève présente un intérêt.

Dans la première section de cette introduction nous rappelons les principales applications des développements de Karhunen-Loève en théorie des probabilités et en statistiques. Dans la section 2 nous montrons comment des notions de théorie de la représentation des groupes ont guidé nos recherches.

0.1 Développement de Karhunen-Loève ou de Kac-Siegert des processus gaussiens

0.1.1 Notations

La théorie de ces développements remonte aux travaux de K. Karhunen ([?] et [?]), M. Loève ([?], [?] et [?]), ainsi que Kac et Siegert ([?] et [?]).

Si $\mathbf{X}$ est un processus gaussien centré défini sur un pavé $T \subseteq \mathbb{R}^n$ muni de la mesure μ, notons

$$K(s,t) = \mathbb{E}\mathbf{X}(s)\mathbf{X}(t),\ \ s,t \in T$$

sa fonction de covariance. On montre que sous l'hypothèse

$$\int_T K(t,t)d\mu(t) < \infty,$$

on peut écrire K comme somme de la série

$$K(s,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k\ f_k(s) f_k(t) \text{ pour } (s,t) \in T \times T \tag{0.1.1}$$

où les couples $\{(f_k, \lambda_k) : k \geq 1\}$ sont formés de fonctions propres normalisées et des valeurs propres de l'opérateur intégral

$$f \in L^2(T, \mathcal{T}, \mu) \mapsto \int_T K(s,.)f(s)d\mu(s)ds$$

associé à K. Ces fonctions et valeurs propres vérifient, pour tout $k, \ell \geq 1$,

$$\int_T K(s,.)f_k(s)d\mu(s) = \lambda_k f_k(.), \tag{0.1.2}$$

$$\int_T f_k(s)f_\ell(s)d\mu(s) = \begin{cases} 1 & \text{si } k = \ell, \\ 0 & \text{si } k \neq \ell. \end{cases} \tag{0.1.3}$$

Si $\{\xi_k : k \geq 1\}$ est une suite de variables i.i.d. $\mathcal{N}(0,1)$, on a alors pour $\mathbf{X}$ le développement ou la représentation de Karhunen-Loève / Kac-Siegert

$$\mathbf{X}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_k}\, \xi_k\ f_k(t),\ t \in T. \tag{0.1.4}$$

Nous nous référerons à (0.1.4) *comme au D-K-L de* $\mathbf{X}$ *sur* T *muni de la mesure* μ.

La convergence dans (0.1.1) et (0.1.4) a lieu dans différents espaces et pour différentes normes qui seront étudiés en détail au chapitre premier (voir notamment le Théorème 1.3.1 p. 36).

0.1.2 Applications en théorie des probabilités

Grandes déviations et petites boules pour un processus gaussien

L'étude des grandes déviations pour la norme L^2, c'est-à-dire de la probabilité

$$P\Big(\int_T \mathbf{X}^2(t) \geq x^2\Big) \text{ pour } x \to \infty,$$

conduit à des résultats similaires pour la plupart des processus gaussiens. Le résultat de Zolotarev [?] montre que la probabilité de ces grandes déviations est calculable dès qu'on connait le D-K-L de $\mathbf{X}$ (voir le Lemme 1.3.5 p. 37).

Par contre, la probabilité des petites boules,

$$P\Big(\int_T \mathbf{X}^2(t) \leq x^2\Big) \text{ pour } x \to 0,$$

donne lieu à des comportements très variables et souvent plus difficiles à étudier. À ce sujet, voir [?], [?] et [?] qui donnent de nombreuses références et applications. La connaissance du D-K-L de $\mathbf{X}$ se révèle ici encore d'une grande utilité, grâce à des résultats comme les Théorèmes 6.1 et 6.2 de [?], que nous utilisons à plusieurs reprises au chapitre premier.

Ces résultats concernant les grandes déviations et les petites boules ont à leur tour des applications statistiques, notamment en permettant d'obtenir des lois du logarithme itéré pour certains processus empiriques (voir la section suivante consacrée aux applications statistiques).

Identités entre fonctionnelles quadratiques du processus de Wiener et du pont Brownien

Dans [?] l'identité en loi

$$(\beta+1)^2\int_0^1 t^{2\beta}\mathbf{W}^2(t)dt=(\beta^*+1)^2\int_0^1 t^{2\beta^*}\mathbf{B}^2(t)dt \text{ avec } \beta^*>-1,\ \beta=\frac{\beta^*+1}{2\beta^*+3},$$

est déduite des D-K-L (0.2.28) – (0.2.29) donnés ci-dessous p. 19. Cette identité n'est pas nouvelle mais avait été obtenue par des voies très différentes (voir [?], [?] et [?]). Au chapitre III p. 101 nous obtenons les identités (3.4.160) et (3.4.161) comme conséquence des développements (3.3.90), (3.3.116) et (3.3.73), (3.3.155) respectivement.

0.1.3 Applications statistiques

La connaissance du D-K-L (0.1.4) a de nombreuses applications statistiques. Elles sont passées en revue par exemple dans [?] au chapitre 5. Voyons les principales.

Supposons qu'on veuille tester l'hypothèse

> H_0 : les variables aléatoires réelles $\{Y_n : n \geq 1\}$ sont indépendantes, équidistribuées, de fonction de répartition commune $F(y) = P(Y_1 \leq y)$ continue.

Sous l'hypothèse nulle la variable $X_n := F(Y_n)$ est uniformément répartie sur $(0,1)$, et on peut donc toujours se ramener à tester l'hypothèse

> H_0' : les variables $\{X_n : n \geq 1\}$ sont indépendantes, uniformément distribuées sur $(0,1)$.

C'est cette dernière que nous prendrons comme hypothèse nulle. Notons F_n la fonction de répartition empirique associée à l'échantillon $X_1, ..., X_n$ défine par

$$F_n(t) := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n 1_{\{X_i\leq t\}} \text{ pour } t\in[0,1], \tag{0.1.5}$$

et $\mathbf{U}_n$ le processus empirique uniforme

$$\mathbf{U}_n(t) := \sqrt{n}\big(F_n(t)-t\big)=\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^n\big(1_{\{X_i\leq t\}}-t\big),\ t\in[0,1]. \tag{0.1.6}$$

Doob [?] et Donsker [?] on montré que sous l'hypothèse nulle on a

$$\mathbf{U}_n \xrightarrow{faiblement} \mathbf{B} \tag{0.1.7}$$

où $\mathbf{B} = \{\mathbf{B}(t) : 0 \leq t \leq 1\}$ est un pont brownien, c'est-à-dire un processus gaussien centré de fonction de covariance

$$\mathbb{E}\mathbf{B}(s)\mathbf{B}(t)=\min(s,t)-st \text{ pour } 0\leq s,t\leq 1,$$

et où la convergence faible est définie comme dans Billingsley [?]. Certaines propriétés asymptotiques de $\mathbf{U}_n$ se déduisent donc des propriétés de $\mathbf{B}$. Beaucoup de processus dont nous obtiendrons les D-K-L sont de la forme

$$\mathbf{X}(t) := \sqrt{q(t)}\, \mathbf{B}\big\{p(t)\big\},\ t \in T \tag{0.1.8}$$

où T est un intervalle de $\mathbb{R}$ et p et q deux fonctions vérifiant des conditions précisées au chapitre premier, notamment dans la section 1.4. Les applications statistiques possibles concerneront donc les processus empiriques de la forme

$$\mathbf{X}_n(t) := \sqrt{q(t)}\, \mathbf{U}_n\big\{p(t)\big\},\ t \in T.$$

Statistiques et tests de type Cramér-von Mises

L'utilisation de la statistique

$$\mathcal{A}^2_{q,n} := \int_{-\infty}^{+\infty} q\big[F(y)\big]\big\{F_n(y) - F(y)\big\}^2 dF(y) \text{ avec } q \geq 0$$

pour tester H_0 a été suggérée par Cramér [?] p. 145-147 et von Mises [?] p. 316-335 (voir aussi [?] et [?] réédités dans [?]). Smirnov a montré dans [?], [?] et [?] que sous l'hypothèse nulle la distribution asymptotique de cette statistique est indépendante de la loi F ; c'est celle d'une variable aléatoire de fonction caractéristique

$$\psi(u) = \big\{\frac{\sqrt{2iu}}{\sin\sqrt{2iu}}\big\}^{1/2} \text{ pour } u \in \mathbb{R}, \tag{0.1.9}$$

et de fonction de répartition

$$\lim_{n\to\infty} P\big(\mathcal{A}^2_{q,n} \leq x\big) = 1 - \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\int_{\nu_{2k-1}}^{\nu_{2k}} \frac{e^{-x\nu/2}d\nu}{\nu\sqrt{-D(\nu)}},\ x \leq 0, \tag{0.1.10}$$

où les ν_k sont les valeurs qui annulent le déterminant de Fredholm

$$D(\nu) = \prod_{k=1}^{\infty}\big(1 - \frac{\nu}{\nu_k}\big)$$

du noyau

$$K_q(x,y) = \sqrt{q(x)q(y)}x(1-y),\ 0 \leq x \leq y \leq 1.$$

Pour $q \equiv 1$ on a $\nu_k = k^2\pi^2$ et on connaît donc théoriquement la distribution asymptotique de la statistique correspondante, dite de Cramér-von Mises,

$$\mathcal{A}^2_n := \int_0^1 \mathbf{U}^2_n(t)dt.$$

En termes de processus le raisonnement est le suivant. La convergence faible (0.1.7) implique que sous l'hypoyhèse nulle

$$\int_0^1 \mathbf{U}_n^2(t)dt \xrightarrow{loi} \int_0^1 \mathbf{B}^2(t)dt.$$

Or le D-K-L du pont brownien s'écrit (voir [?])

$$\mathbf{B}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\pi}\ \xi_k\ \left\{\sqrt{2}\sin(k\pi t)\right\},\ 0 \le t \le 1. \tag{0.1.11}$$

On en déduit aisément

$$\int_0^1 \mathbf{B}^2(t)dt \overset{loi}{=} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2\pi^2}\ \xi_k^2.$$

Cette somme pondérée de variables χ^2 a une fonction caractéristique donnée pour $u \in \mathbb{R}$ par

$$\psi(u) = \prod_{k=1}^{\infty}(1 - \frac{2iu}{k^2\pi^2})^{-1/2} = \{\frac{\sqrt{2iu}}{\sin\sqrt{2iu}}\}^{1/2}$$

et on retrouve bien (0.1.9). En inversant cette fonction caractéristique Anderson et Darling ont donné ([?] p. 203) un tableau des quantiles de $\mathcal{A}^2$. Sur la statistique de Cramér-von Mises et sa distribution pour différentes valeurs de n, on pourra également consulter [?], [?], [?], [?], [?], [?] et [?]). La distribution exacte de $\mathcal{A}_n^2$ pour tout $n \ge 1$ a été obtenue par S. Csörgő et J. Faraway dans [?].

Plus généralement, si $\mathbf{X}_n$ est un processus empirique convergeant faiblement ou (ce qui est moins restrictif) en norme L^2 vers un processus gaussien centré $\mathbf{X}$ dont le D-K-L est donné par (0.1.4), on a

$$\int_T \mathbf{X}_n^2(t)d\mu(t) \xrightarrow{loi} \int_T \mathbf{X}^2(t)d\mu(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k\xi_k^2$$

et la fonction caractéristique de cette somme pondérée de variables χ^2 est donnée, pour $u \in \mathbb{R}$, par

$$\psi(u) = \prod_{k=1}^{\infty}\left(1 - 2iu\lambda_k\right)^{-1/2}.$$

L'inversion de cette fonction conduit à une relation du type (0.1.10). La distribution de la variable aléatoire $\int_T \mathbf{X}^2(t)d\mu(t)$ constitue pour n assez grand une approximation de celle de la statistique $\int_T \mathbf{X}_n^2(t)d\mu(t)$. C'est ainsi qu'on peut construire un test. Différentes méthodes et résultats concernant ce type de statistiques et les techniques de calcul de leur distribution asymptotique sont donnés dans [?] et la série d'articles [?], [?], [?], [?], [?], [?] et [?]. Un cas particulier est constitué par les statistiques de la forme

$$\mathcal{A}_{q,n}^2 := \int_0^1 q(t)\mathbf{U}_n^2(t)dt$$

où q est une fonction de poids positive telle que

$$\int_0^1 t(1-t)q(t)dt < \infty. \tag{0.1.12}$$

Chibisov [?] a montré la convergence en loi de cette statistique vers la variable aléatoire

$$\mathcal{A}_q^2 := \int_0^1 q(t)\mathbf{B}^2(t)dt$$

qui est presque sûrement finie sous l'hypothèse (0.1.12). Pour $q \equiv 1$ on retrouve la statistique de Cramér-von Mises. Pour $q(t) = [t(1-t)]^{-1}$ on obtient la statistique

$$\int_0^1 \frac{\mathbf{U}_n^2(t)}{t(1-t)}dt$$

introduite par Anderson et Darling [?] et [?] qui ont utilisé le D-K-L (0.2.16) du processus gaussien limite

$$\frac{\mathbf{B}(t)}{\sqrt{t(1-t)}}.$$

Pour ce processus, on est dans le cas où il n'y a pas convergence faible, mais seulement en norme L^2, sous l'hypothèse nulle, du processus empirique correspondant :

$$\frac{\mathbf{U}_n(t)}{\sqrt{t(1-t)}} \xrightarrow[\textit{faiblement}\ :\ \text{non}]{L^2\ :\ \text{oui}} \frac{\mathbf{B}(t)}{\sqrt{t(1-t)}}$$

(voir [?] pour une condition nécessaire et suffisante sur q pour avoir la convergence faible). Ici la fonction q n'est ni continue ni sommable sur $[0,1]$, et le développement (0.1.1) est plus difficile à démontrer car il n'est plus une conséquence du théorème de Mercer. C'est pourquoi une partie importante du chapitre premier est consacrée à la démonstration d'une généralisation du théorème de Mercer à de tels cas.

D'autres exemples de l'utilisation du D-K-L du pont brownien pondéré pour construire un test de type Cramér-von Mises sont donnés dans [?] avec $q(t) = t^{-1}$ et [?] avec $q_1(t) = [1-t^2]^{-1}$ et $q_2(t) = [t(2-t)]^{-1}$. Des généralisations du D-K-L obtenu par de Scott sont données dans [?], et nous reviendrons sur ceux de Rodríguez-Viollaz dans la section suivante, car nous donneront une généralisation de ce processus au chapitre III.

Si on suppose que la distribution F à tester appartient à une certaine famille paramétrique, un choix judicieux de la fonction q permet parfois d'obtenir un test asymptotiquement optimal au sens de Bahadur. La référence de base concernant l'efficacité de Bahadur est [?] et son application aux tests de type Cramér-von Mises est abordée par exemple dans [?]. Ainsi dans le cas d'une distribution logistique de moyenne inconnue, la statistique d'Anderson-Darling est asymptotiquement optimale, alors que dans le cas du cosinus hyperbolique, c'est la statistique de Cramér-von Mises (voir [?] Tableau 3 p. 80 et [?] Tableau 5.1 p. 410).

L'utilisation des statistiques de type Cramér-von Mises dans le cas paramétrique avec paramètres éstimés à partir de l'échantillon est exposée à la section 5 du chapitre 5 de [?], où l'on trouvera également de nombreuses références sur le sujet.

Décomposition en composantes principales

On trouve des exemples de cette décomposition pour le processus empirique uniforme $\mathbf{U}_n(t)$ et le processus empirique d'Anderson-Darling $\mathbf{U}_n(t)/[t(1-t)]$ dans [**?**], [**?**] et [**?**]. Cette technique est basée sur le fait que les fonctions $f_k,\ k \geq 1$ du D-K-L (0.1.4) forment un système orthonormal dans $L^2(T,\mu)$, ce qui implique pour tout $k \geq 1$ la convergence en loi

$$\lim_{n\to\infty} \int_T \mathbf{X}_n(t) f_k(t) dt = \sqrt{\lambda_k}\, \xi_k.$$

La variable aléatoire du membre de droite suit une loi $\mathcal{N}(0,\lambda_k)$, ce qui permet ici encore de construire un test.

Grandes déviations, petites boules et loi du logarithme itéré du type Chung-Mogulski

De la loi du logarithme itéré

$$\liminf_{h\to 0} \sup_{0\leq s\leq h} \big\{\frac{\log_2(1/h)}{h}\big\}^{1/2} |\mathbf{W}(t+s) - \mathbf{W}(t)| = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \text{ p.s. pour tout } t \in [0,1)$$

obtenue par Chung [**?**] pour le processus de Wiener, Mogulski [**?**] a déduit pour le processus empirique uniforme et la norme de la convergence uniforme sur $[0,1]$ la loi du logarithme itéré qui donne, sous l'hypothèse nulle, la limite presque sûre

$$\liminf (\log_2 n)^{1/2} \|\mathbf{U}_n\| = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

Il donne dans le même article une loi analogue pour la norme L^2 qui s'écrit

$$\liminf\ (\log_2 n) \int_0^1 \mathbf{U}_n^2(t) dt = \frac{1}{8}. \tag{0.1.13}$$

Si on connait la probabilité des grandes déviations et des petites boules pour la norme L^2 de $\mathbf{X}(t) = \sqrt{q(t)}\,\mathbf{B}\{p(t)\}$, on peut obtenir pour le processus empirique $\mathbf{X}_n(t) = \sqrt{q(t)}\,\mathbf{U}_n\{p(t)\}$ une loi du logarithme itéré pour la norme L^2 qui généralise (0.1.13). Il suffit pour cela d'obtenir une majoration de

$$\Big| P\big(\int_T \mathbf{X}_n^2(t) d\mu(t) \leq x^2\big) - P\big(\int_T \mathbf{X}^2(t) d\mu(t) \leq x^2\big)\Big| \tag{0.1.14}$$

pour $x \geq 0,\ n \in \mathbb{N}^*$ et de suivre la méthode de Mogulski [**?**]. Là encore, les difficultés surgissent lorsque q est non sommable car la plupart des majorations usuelles de (0.1.14) ne s'appliquent qu'avec q bornée ou sommable. Des résultats sont donnés dans les sections 1.5 et 1.6 du chapitre premier, qui aboutissent à la loi du logarithme itéré de la proposition 1.6.1 p. 43.

0.2 Liens avec la théorie des groupes

Les notions et résultats concernant la représentation des groupes que nous utilisons dans cette section sont exposés dans de nombreux ouvrages, par exemple dans [?]. Notre principale référence a été [?] (voir aussi l'édition plus récente [?], [?]). Remarquant qu' « à première vue la théorie des fonctions spéciales est un assemblage chaotique de formules », l'auteur a pour but de retrouver ces formules et « présenter la théorie des fonctions spéciales du point de vue de la théorie des groupes. » Cet ouvrage se place dans une lignée initiée par les travaux d'E. Cartan (voir notamment [?]), établissant des liens entre de nombreuses fonctions intervenant en physique (fonctions trigonométriques, fonctions de Bessel, de Legendre, fonction hypergéométrique etc) et la théorie des groupes. Cette optique répond précisément à nos besoins puisque beaucoup des D-K-L que nous connaissons (voir plus loin quelques exemples) font intervenir des fonctions spéciales.

0.2.1 Un lien entre deux développements classiques et les représentations des groupes S0(2) et SU(2)

Réécrivons le D-K-L du pont brownien donné plus haut,

$$\mathbf{B}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\pi}\, \xi_k \,\left\{\sqrt{2}\sin(k\pi t)\right\},\ 0 \leq t \leq 1. \tag{0.2.15}$$

D'autre part si on identifie tout $g \in S0(2)$ (le groupe des rotations du plan euclidien autour de l'origine), à l'angle θ de la rotation correspondante, on sait (voir [?], chapitre II § 1.2) que toute représentation irréductible de dimension finie de ce groupe est unitaire, de dimension 1 et de la forme

$$T_k(g) = \exp(ik\theta) \text{ avec } k \in \mathbb{Z}.$$

Si on pose $\theta = \pi t$ et $g = g(\theta)$, les fonctions $\sin(k\pi t)$ qui apparaissent dans (0.2.15) sont donc combinaisons linéaires de $T_k(g)$ et $T_{-k}(g)$.

Pour le processus d'Anderson-Darling, on a sur $(0,1)$

$$\mathbf{Z}(t) := \frac{\mathbf{B}(t)}{\sqrt{t(1-t)}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k(k+1)}}\, \xi_k\, \frac{2}{\sqrt{k(k+1)}} \sqrt{t(1-t)}P_k'(2t-1) \tag{0.2.16}$$

où P_k désigne le polynôme de Legendre

$$P_k(z) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^k}{dz^k}(z^2-1)^k.$$

D'autre part, $SU(2)$ désignant l'ensemble des matrices d'ordre 2 à coefficients dans $\mathbb{C}$ de la forme

$$g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\overline{\beta} & \overline{\alpha} \end{pmatrix}\ ,\ |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1, \tag{0.2.17}$$

on peut paramétrer ce groupe par les 3 angles d'Euler ϕ, ψ et θ définis de manière unique lorsque $\alpha\beta \neq 0$ par les relations

$$|\alpha| = \cos\frac{\theta}{2}, \qquad \arg\alpha = \frac{\phi+\psi}{2}, \qquad \arg\beta = \frac{\phi-\psi+\pi}{2},$$

et

$$0 \leq \phi < 2\pi, \qquad 0 \leq \theta < \pi, \qquad -2\pi \leq \psi < 2\pi.$$

La matrice (0.2.17) s'écrit alors en fonction de ces angles (voir [?] chapitre III § 1.2 relation (4) p. 93)

$$g(\phi,\theta,\psi) = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2}e^{i\frac{\phi+\psi}{2}} & i\sin\frac{\theta}{2}e^{i\frac{\phi-\psi}{2}} \\ i\sin\frac{\theta}{2}e^{i\frac{\psi-\phi}{2}} & \cos\frac{\theta}{2}e^{-i\frac{\phi+\psi}{2}} \end{pmatrix}$$

On obtient un système complet de représentations de $SU(2)$ unitaires irréductibles deux à deux non équivalentes en considérant, pour $l = 0, 1/2, 1, 3/2, \ldots$ la représentation de degré $2l+1$ définie par la matrice (voir [?] chapitre II §3.4 relation (6) p. 121)

$$T_\ell(g) = \left\{t^\ell_{m,n}(g)\right\}_{\substack{-\ell\leq m\leq \ell\\ -\ell\leq n\leq\ell}} \text{ avec } \begin{cases} m, n = -\ell, -\ell+1, \ldots, \ell, \\ t^\ell_{m,n}(g) = e^{-i(m\phi+n\psi)}P^\ell_{m,n}(\cos\theta), \end{cases}$$

avec pour $n = 0$ et $m \geq 0$ ([?] relation (9) p. 127)

$$P^\ell_{m,0}(z) = i^{-m}\sqrt{\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}}\, P^m_\ell$$

où P^m_ℓ est la fonction de Legendre de première espèce d'indices m et ℓ qui vérifie ([?] relation (17) p. 128)

$$P^m_\ell(z) = (-1)^m(1-z^2)^{\frac{m}{2}}\frac{d^m P_\ell(z)}{dz^m}. \tag{0.2.18}$$

On obtient donc pour $m = 1$, $g = g(0,0,\theta)$ et en posant $\cos\theta = 2t-1$ soit $4t(1-t) = \sin^2\theta$,

$$t^\ell_{1,0}(g(0,0,\theta)) \propto P^1_\ell(\cos\theta) \propto \sqrt{t(1-t)}P'_\ell(2t-1)$$

et les fonctions apparaissant dans le développement (0.2.16) ont une expression simple en fonction des éléments matriciels des représentations irréductibles du groupe $SU(2)$.

Le groupe $SU(2)$ est localement isomorphe à $SO(3)$. En généralisant, il semble donc légitime d'éspérer trouver, pour tout $n \geq 1$, des processus pour lesquels les fonctions propres du D-K-L seront des éléments matriciel des représentatations du groupe $SO(n+1)$. Certains de ces éléments matriciels sont à une constante près de la forme ([?], chapitre IX, relation (9) p. 484)

$$\sin^m\theta\, G^{\frac{n-1}{2}+m}_{k-m}(\cos\theta) \text{ avec } k \geq m, \tag{0.2.19}$$

$G^\alpha_\ell(\cos\theta)$ désignant le polynôme de Gegenbauer d'ordre $\alpha \in (-\frac{1}{2}, \infty)$ et d'indice $\ell \in \mathbb{N}$ (la définition de toutes les fonctions spéciales utilisées est rappelée en annexe). Nous obtenons bien de tels D-K-L au chapitre IV, par un procédé que nous décrivons au paragraphe 0.2.5 ci-dessous.

0.2.2 Un lien entre d'autres développements et le laplacien sur certaines variétés

Un autre D-K-L bien connu est celui du processus de Wiener $\mathbf{W}$ restreint à $[0,1]$ dont la fonction de covariance est

$$\mathbb{E}\mathbf{W}(s)\mathbf{W}(t) = \min(s,t).$$

On a pour ce processus (voir par exemple dans l'article original de Wiener [?] la relation (8.07) p. 664) la représentation

$$\mathbf{W}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k-\frac{1}{2})\pi}\, \xi_k\, \sqrt{2}\sin\{(k-\frac{1}{2})\pi t\},\ 0 \le t \le 1. \tag{0.2.20}$$

Les inverses des valeurs propres $\{(k-\frac{1}{2})\pi\}^2$ pour $k \ge 1$ correspondent aux valeurs propres du laplacien sur $(0,1)$ avec les conditions aux limites dites mixtes (voir [?] p. 10).

Un exemple plus récent est le processus introduit par Rodríguez et Viollaz [?] et qui s'écrit

$$\frac{\mathbf{B}(t)}{\sqrt{t(2-t)}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2k(2k+1)}}\, \xi_k\, \frac{2}{\sqrt{2k(2k+1)}}\sqrt{t(1-t)}P'_{2k}(2t-1). \tag{0.2.21}$$

Les fonctions propres et les valeurs propres de ce développement sont les mêmes que celles d'indices pairs pour le processus d'Anderson-Darling.

Il est intéressant de rapprocher les développements (0.2.15) – (0.2.16) et (0.2.21) du tableau suivant, qui donne les opposés des valeurs propres du laplacien Δ sur la sphère de dimension n de rayon 1, ainsi que sur l'espace projectif réel de dimension n (obtenu en identifiant sur S^n les points antipodaux). Ces variétés sont des cas particuliers d'espaces homogènes, c'est-à-dire obtenus comme quotient $V = G/K$ de deux groupes :

V	G	K	$\mu_k,\ k \ge 0$
S^n	$O(n+1)$	$O(n)$	$k(k+n-1)$
$\mathbb{RP}^n$	$O(n+1)$	$O(n)\times\{-1,1\}$	$2k(2k+n-1)$

Ici, $O(n)$ est le groupe orthogonal de l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$.
On constate que pour S^n :

$$n = 1 \Rightarrow \pi^2\mu_k = k^2\pi^2 \text{ et } n = 2 \Rightarrow \mu_k = k(k+1).$$

Pour $\mathbb{RP}^n$

$$n = 2 \Rightarrow \mu_k = 2k(2k+1).$$

On voit que les valeurs propres des D-K-L (0.2.15) – (0.2.16) et (0.2.20) – (0.2.21) sont les inverses, à un coefficient près, des valeurs propres du laplacien sur ces espaces.

Le lien entre ces processus et le laplacien sur la variété correspondante va plus loin. D'une part tous ces processus ont une fonction de covariance triangulaire, i.e. de la forme

$$K(s,t) = K_1(s)K_1(t) \text{ pour } 0 < s \leq t < 1$$

où K_1 et K_2 vérifient une relation de la forme $\Delta K_i = \mu_i K_i,\ i = 1, 2$. D'autre part les fonctions apparaissant dans le D-K-L correspondent aussi à des fonctions propres du laplacien.
En effet pour le processsus de Wiener on a

$$K_1(s) = s,\ K_2(s) = 1 \text{ et } K_1'' = K_2'' = 0\ ;\ f_k'' = -\lambda_k^{-1} f_k.$$

Pour le pont brownien on a

$$K_1(s) = s,\ K_2(s) = 1 - s \text{ et } K_1'' = K_2'' = 0\ ;\ f_k'' = -\lambda_k^{-1} f_k.$$

Pour le processus d'Anderson-Darling, ramenons-nous à un processus défini sur la sphère en effectuant le changement de variable

$$t = \frac{1 - \cos\theta}{2} \text{ soit } \sqrt{t(1-t)} = \frac{\sin\theta}{2},\ \text{pour } 0 < t < 1,\ 0 < \theta < \pi.$$

Le D-K-L (0.2.16) valable sur $(0, 1)$ muni de la mesure de Lebesgue nous donne un D-K-L sur $(0, \pi)$ muni de la mesure de densité $dt/d\theta = \sin\theta/2$. En tenant compte de la relation (0.2.18) il vient

$$2\frac{\mathbf{B}\left(\frac{1-\cos\theta}{2}\right)}{\sin\theta} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k(k+1)}}\ \xi_k\ \frac{1}{\sqrt{k(k+1)}} \sin\theta P_k'(\cos\theta). \tag{0.2.22}$$

La fonction de covariance de ce nouveau processus est triangulaire avec

$$K_1(\theta) = \big(\frac{t}{1-t}\big)^{1/2} = \tan\frac{\theta}{2},\ K_2(s) = \big(\frac{1-t}{t}\big)^{1/2} = \cot\frac{\theta}{2}.$$

En coordonnées sphériques (θ, ϕ) le laplacien d'une fonction F définie sur la sphère s'écrit

$$\Delta F(\theta, \phi) = \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial F}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 F}{\partial\phi^2}.$$

Des calculs élémentaires donnent

$$\Delta K_i - \frac{1}{\sin^2\theta} K_i = 0 \text{ pour } i = 1, 2. \tag{0.2.23}$$

D'autre part on montre en théorie de la représentation des groupes, grâce au lemme de Schur, que les fonctions propres du laplacien sur la sphère sont les éléments matriciels $t_{m,0}^{\ell}$ définis plus haut. On a plus précisément

$$\Delta\big\{e^{-im\phi} P_{m,0}^{\ell}(\cos\theta)\big\} = -\ell(\ell+1)e^{-im\phi} P_{m,0}^{\ell}(\cos\theta).$$

Cette relation prise pour $m = 1$, $\ell = k$ et donc $P^\ell_{m,0} = P^1_k$, nous donne pour les fonctions du D-K-L (0.2.22)

$$\Delta P^1_k(\cos\theta) - \frac{1}{\sin^2\theta} P^1_k(\cos\theta) = -k(k+1)P^1_k(\cos\theta) \text{ pour } k \geq 1 \tag{0.2.24}$$

Les relations (0.2.23) – (0.2.24) montrent qu'ici encore les composantes de la fonction de covariance et les fonctions du D-K-L sont fonctions propres d'un même opérateur différentiel lié au laplacien.
Au chapitre II, le Théorème 2.2.1 et la Proposition 2.2.1 généralisent ce résultat.

0.2.3 Une première généralisation du processus d'Anderson-Darling

On obtient un premier résultat intéressant grâce aux remarques précédentes en prenant pour fonction de covariance une puissance positive de celle du processus d'Anderson-darling, soit

$$K_\mu(s,t) = \{\frac{\min(s,t) - st}{\sqrt{s(1-s)t(1-t)}}\}^\mu \text{ pour } 0 < s,t < 1, \text{ avec } \mu > 0.$$

C'est bien une fonction de covariance, elle est triangulaire et après le changement de variable $t = (1-\cos\theta)/2$, ses deux composantes $K_{\mu,1}$ et $K_{\mu,2}$ vérifient l'analogue de la relation (0.2.23)

$$\Delta K_{\mu,i} - \frac{\mu^2}{\sin^2\theta} K_{\mu,i} = 0 \text{ pour } i = 1,2. \tag{0.2.25}$$

On peut s'attendre à obtenir pour le D-K-L des fonctions vérifiant une relation analogue à (0.2.25). C'est bien le cas, et ce processus fait l'objet d'une étude détaillée dans un article en cours de publication que nous avons reproduit à la fin du chapitre IV. On y trouve une application statistique aux tests d'ajustements, utilisant la notion de fonction de dépendance pour un processus multivarié, étudiée dans [**?**], [**?**] et [**?**]. Dans le chapitre IV, d'autres exemples construits par la même méthode sont donnés. Ils font intervenir pour la plupart des fonctions de Legendre, notamment avec le cas particulier des fonctions coniques de Mehler.

0.2.4 Opérateurs invariants et théorie des groupes

Les exemples précédents ont fait apparaitre le rôle d'opérateurs différentiels proches du laplacien. Or il y a un lien bien connu entre certains opérateurs et les éléments maticiels des représentations d'un groupe. Soit G un groupe agissant sur un ensemble V et $\mathcal{F}$ un espace vectoriel de fonctions définies sur V tels que : pour tout $g \in G$, $f \in \mathcal{F} \Rightarrow f \circ g^{-1} \in \mathcal{F}$. On dit que l'opérateur A dans $\mathcal{F}$ est invariant par G s'il commute avec les opérateurs de translation

$$T(g)[f](x) := f(g^{-1}x) \text{ pour tout } x \in V,\ g \in G,\ f \in \mathcal{F},$$

c'est-à-dire si pour tout $g \in G$ on a

$$AT(g) = T(g)A.$$

Par exemple le laplacien est invariant par les déplacements de l'espace euclidien. Le résultat fondamental est le suivant.

Théorème *Soit A un opérateur invariant pour les opérateurs de translation du groupe G. Toute fonction propre de A est combinaison linéaire d'éléments matriciels de représentations irréductibles du groupe G.*

L'idée pour construire des processus liés à G est alors la suivante :
1°) Trouver une fonction de covariance triangulaire dont les composantes sont fonctions propres d'un opérateur invariant par G.
2°) Alors les fonctions propres du D-K-L seront aussi fonctions propres de cet opérateur et donc calculables explicitement si on connait les représentations irréductibles de ce groupe.
Mais si G est un groupe de Lie de dimension supérieure à 2, comment passer d'un processus sur G à un processus dans $\mathbb{R}$? Un processus défini sur $(0, 1)$ étant donné, comment savoir à quel groupe il est éventuellement lié ? Un nouvel examen du processus d'Anderson-Darling permet d'envisager une réponse à ces questions, en montrant notamment le rôle de la fonction distance sur une variété liée à G.

0.2.5 Une interprétation géométrique du processus d'Anderson-Darling

Examinons d'un point de vue géométrique le processus d'Anderson-Darling, ou plutôt le processus (0.2.22) obtenu par changement de variable. Sur une sphère de rayon 1 munie des coordonnées sphériques, la distance $r(\xi)$ du point $\xi = (\theta, \phi)$ au pôle nord PN est égale à la mesure en radian de l'angle θ. Celui-ci peut donc être interprété comme la fonction distance au pôle. La boule de centre PN et de rayon r est une calotte sphérique de surface $V(r) = [1 - \cos r]/2$ pour $0 \leq r \leq \pi$. Sa frontière est un cercle de périmètre $A(r) = 2\pi \sin r$. Le nombre $V(\pi)$ représente l'aire totale de la sphère. Le diamètre « intrinsèque » de la sphère vaut $\delta := \sup_{\xi,\xi' \in S^2} d(\xi, \xi') = \pi$. Le membre de gauche dans (0.2.22) s'écrit alors à une constante près

$$\frac{\mathbf{B}\{\frac{V(r)}{V(\delta)}\}}{A(r)},\ 0 < r < \delta.$$

L'intérêt de cette expression est qu'elle ouvre clairement la voie à des généralisations dans d'autres variétés. On fixe un point origine x_0 dans une variété de dimension n, on note $V(r)$ le n-volume de la boule de rayon r centrée en x_0 et $A(r)$ est le $(n-1)$-volume de la sphère correspondante, c'est-à-dire l'aire de cette boule. Au chapitre II nous nous plaçons dans les espaces symétrique de rang 1 dont la liste est donnée p. 49. En notant δ le diamètre de l'espace et $R_1 \leq r_1 < r_2 \leq R_2$ des réels de l'intervalle $[0, \delta]$, les Théorèmes 2.3.1, 2.3.2 et 2.3.3 montrent que les processus

$$\frac{\mathbf{B}\left\{\frac{V(r)-V(R_1)}{V(R_2)-V(R_1)}\right\}}{A(r)},\ \frac{\mathbf{W}\left\{\frac{V(r)-V(R_1)}{V(R_2)-V(R_1)}\right\}}{A(r)} \text{ et } \mathbf{W}\Big\{\int \frac{d\rho}{A(\rho)}\Big\},\quad r_1 < r < r_2 \tag{0.2.26}$$

ont une fonction de covariance triangulaire et un D-K-L sur (r_1, r_2) muni de la mesure de densité $A(r)$ dont les fonctions et les valeurs propres sont liées à celles d'un opérateur lié au laplacien sur V. Dans le cas de l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ et pour $R_1 = r_1 = 0$, $R_2 = r_2 = 1$, les deux premiers processus définis par (0.2.26) s'écrivent à une constante près

$$r^{1-n}\mathbf{B}(r^n),\ r^{1-n}\mathbf{W}(r^n),\quad 0 < r < 1.$$

De tels processus ont fait récemment l'objet d'une étude par Deheuvels et Martynov dans [?]. Voyons comment certains de leurs résultats s'interprètent dans le cadre géométrique que nous proposons. La variété considérée est donc l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$. La surface d'une boule de rayon r y est proportionnelle à r^{n-1}. Les représentations unitaire irréductibles du groupe des déplacements de $\mathbb{R}_n$ sont indexées par un nombre complexe R et certains éléments matriciels de la représentation T_R sont à une constante près de la forme ([?] chapitre XI §3.5, formule (5) p. 570),

$$r^{\frac{2-n}{2}} J_{\frac{n}{2}+m-1}(Rr),\ \text{avec } m \in \mathbb{N} \tag{0.2.27}$$

où pour $\nu \in \mathbb{C}$, J_ν est la fonction de Bessel de première éspèce d'indice ν. Or [?] donne, pour $\rho > 0$, $\theta > -\frac{1}{2}(\rho+1)$ et $\nu = \rho/(2\theta+\rho+1)$,

$$r^\theta \mathbf{B}(r^\rho) = \sum_{k=1}^{\infty}\Big\{\frac{2\nu}{z_{\nu,k}\sqrt{\rho}}\Big\}\xi_k\Big\{\sqrt{\rho}\, r^{\frac{\rho}{2\nu}-\frac{1}{2}}\Big\{\frac{J_\nu\big(z_{\nu,k} r^{\frac{\rho}{2\nu}}\big)}{\sqrt{\nu}J_{\nu-1}\big(z_{\nu,k}\big)}\Big\}\Big\}, \tag{0.2.28}$$

$$r^\theta \mathbf{W}(r^\rho) = \sum_{k=1}^{\infty}\Big\{\frac{2\nu}{z_{\nu-1,k}\sqrt{\rho}}\Big\}\xi_k\Big\{\sqrt{\rho}\, r^{\frac{\rho}{2\nu}-\frac{1}{2}}\Big\{\frac{J_\nu\big(z_{\nu-1,k} r^{\frac{\rho}{2\nu}}\big)}{\sqrt{\nu}J_{\nu}\big(z_{\nu-1,k}\big)}\Big\}\Big\}. \tag{0.2.29}$$

Pour tout entier $n \geq 1$, ces deux développements avec $\rho = n$, $\theta = (1-n)/2$, et donc $\nu = n/2$ s'écrivent

$$r^{\frac{1-n}{2}}\mathbf{B}(r^n) = \sum_{k=1}^{\infty}\Big\{\frac{\sqrt{n}}{z_{\frac{n}{2},k}}\Big\}\xi_k\Big\{\sqrt{2}r^{\frac{1}{2}}\Big\{\frac{J_{\frac{n}{2}}\big(z_{\frac{n}{2},k} r\big)}{J_{\frac{n}{2}-1}\big(z_{\frac{n}{2},k}\big)}\Big\}\Big\}, \tag{0.2.30}$$

$$r^{\frac{1-n}{2}}\mathbf{W}(r^n) = \sum_{k=1}^{\infty}\Big\{\frac{\sqrt{n}}{z_{\frac{n}{2}-1,k}}\Big\}\xi_k\Big\{\sqrt{2}r^{\frac{1}{2}}\Big\{\frac{J_{\frac{n}{2}}\big(z_{\frac{n}{2}-1,k} r\big)}{J_{\frac{n}{2}}\big(z_{\frac{n}{2}-1,k}\big)}\Big\}\Big\}. \tag{0.2.31}$$

En divisant le membre de gauche et les fonctions propres par $r^{(n-1)/2}$, on obtient le D-K-L sur $(0,1)$ muni de la mesure de densité r^{n-1} (quantité proportionnelle à $A(r)$, surface d'une boule de rayon r dans E_n)

$$r^{1-n}\mathbf{B}(r^n) = \sum_{k=1}^{\infty}\Big\{\frac{\sqrt{n}}{z_{\frac{n}{2},k}}\Big\}\xi_k\Big\{\sqrt{2}r^{\frac{2-n}{2}}\Big\{\frac{J_{\frac{n}{2}}(z_{\frac{n}{2},k}r)}{J_{\frac{n}{2}-1}\big(z_{\frac{n}{2},k}\big)}\Big\}\Big\}, \tag{0.2.32}$$

$$r^{1-n}\mathbf{W}(r^n) = \sum_{k=1}^{\infty}\Big\{\frac{\sqrt{n}}{z_{\frac{n}{2}-1,k}}\Big\}\xi_k\Big\{\sqrt{2}r^{\frac{2-n}{2}}\Big\{\frac{J_{\frac{n}{2}}(z_{\frac{n}{2}-1,k}r)}{J_{\frac{n}{2}}\big(z_{\frac{n}{2}-1,k}\big)}\Big\}\Big\}. \tag{0.2.33}$$

Les fonctions apparaissant dans ces développements sont bien des éléments matriciels de la forme (0.2.27) avec $m = 1$, $t = r$ et $R = z_{\frac{n}{2}-1,k}$ ou $z_{\frac{n}{2},k}$. Dans ce même article, les auteurs remarquent qu'un cas intéressant des développements (0.2.28) – (0.2.29) est $\rho = 2\nu$ car on obtient alors, après multiplication par $r^{-1/2}$ le développement en série de Fourier-Bessel de $r^{-\nu}\mathbf{B}(r^{2\nu})$ et le développement en série de Dini de $r^{-\nu}\mathbf{B}(r^{2\nu})$. C'est un cas de ce type que nous avons d'ailleurs envisagé avec en prenant $\rho = n$, $\theta = (1-n)/2$. L'obtention de développements en série de Dini ou de Fourier-Bessel apparaît alors comme une conséquence du résultat suivant d'analyse harmonique sur les groupes, qui donne le développement d'une fonction définie sur G en fonction des éléments matriciels des représentations de ce groupe.

Théorème *Soit $\{T_\alpha(g), \alpha \in A\}$ un système fondamental de représentations unitaires irréductibles, non équivalentes deux à deux, d'un groupe compact G, la dimension de $T_\alpha(g)$ étant noté par d_α et ses éléments matriciels par $t^\alpha_{i,j}(g)$, $1 \le i,j \le d_\alpha$. Alors les fonctions*

$$g \mapsto \sqrt{d_\alpha}t^\alpha_{i,j}(g),\ 1 \le i,j \le d_\alpha,\ \alpha \in A \tag{0.2.34}$$

forment une base orthonormale de l'espace $L^2(G)$.

En effet si notre processus $\mathbf{X}$ défini sur g a un D-K-L dont les fonctions propres sont de la forme $f_k(g) = \sum_{\alpha,i,j} c^\alpha_{i,j}(k)t^\alpha_{i,j}(g)$ (combinaison linéaire d'éléments matriciels), avec

$$\int K(g,g')\Big\{\sum_k c^\alpha_{i,j}(k)\sqrt{d_\alpha}t^\alpha_{i,j}(g')\Big\}dg' = \lambda_k \sum_{(\alpha,i,j)} c^\alpha_{i,j}(k)\sqrt{d_\alpha}t^\alpha_{i,j}(g),$$

le D-K-L de $\mathbf{X}$ s'écrit

$$\mathbf{X}(g) = \sum_k \sqrt{\lambda_k}\xi_k\Big\{\sum_{(\alpha,i,j)} c^\alpha_{i,j}(k)\sqrt{d_\alpha}t^\alpha_{i,j}(g)\Big\} = \sum_{(\alpha,i,j)}\Big\{\sum_k \sqrt{\lambda_k}c^\alpha_{i,j}(k)\xi_k\Big\}\sqrt{d_\alpha}t^\alpha_{i,j}(g).$$

On voit donc que le D-K-L de $\mathbf{X}$ sur G muni de la mesure de Haar se confond avec son développement en série de Fourier.

Toutes ces remarques montrent qu'il est possible d'interpréter beaucoup de résultats connus dans le domaine qui nous intéresse grâce au cadre géométrique que nous proposons.

Reste à montrer qu'on peut trouver de nouveaux processus avec leur D-K-L par ce moyen. C'est l'objet des chapitres II et III. Le chapitre II donne des résultats généraux concernant les processus du type (0.2.26) dans des espaces symétriques de rang 1. Au chapitre III, on considère le cas particulier d' espaces de courbure constante. On y trouve des expressions explicites du D-K-L de plusieurs séries de processus, construites chacune sur un même type d'espace mais dont on fait varier la dimension. On obtient en général les processus évoqués dans cette introduction comme premier terme de ces séries, correspondant aux dimensions 1 ou 2.

On trouvera dans les pages 85 à 101 des expressions générales du D-K-L de ces séries de processus. Nous avons pour chacune explicité les fonctions et les valeurs propres pour les dimensions allant de 1 à 10. À titre d'exemple, citons le Théorème 3.3.2 p. 85 qui donne le D-K-L d'un processus lié à une sphère de dimension n. Pour $n = 1$ on retrouve le pont brownien et pour $n = 2$ le processus d'Anderson-Darling. Celui-ci apparait comme cas particulier d'une famille de processus correspondant aux sphères de dimension paire de l'espace euclidien, dont les premiers (pour les dimensions 2, 4 et 6) sécrivent, avec $t \in (0, 1)$,

$$\frac{\mathbf{B}(t)}{\sqrt{t(1-t)}}, \ \frac{1}{\sqrt{6}} \frac{\mathbf{B}(3t^2 - 2t^3)}{t(1-t)}, \ \frac{1}{\sqrt{30}} \frac{\mathbf{B}(6t^5 - 15t^4 + 10t^3)}{\{t(1-t)\}^{3/2}} \quad \text{etc.}$$

Les valeurs propres des D-K-L correspondant sont les inverses des valeurs propres de $-\Delta$ (données dans la seconde ligne du tableau p. 15), c'est-à-dire, pour $k \geq 1$ de la forme

$$\frac{1}{k(k+1)}, \ \frac{1}{k(k+3)}, \ \frac{1}{k(k+5)} \ \text{etc.}$$

Les remarques faites ci-dessus à propos du pont brownien et du processus d'Anderson-Darling se généralisent à tous ces processus. En effet les fonctions propres du D-K-L correspondant à la dimension n, données par la relation (3.3.89) p. 85, sont de la forme

$$\sin\theta \, G_{k-1}^{\frac{n+1}{2}}(\cos\theta),$$

ce qui correspond bien à des élements matriciels des représentations du groupe $SO(n+1)$, comme on le voit en prenant $m = 1$ dans (0.2.19).

Nous terminons cette introduction en signalant que la théorie des groupes interviendra peu de façon explicite dans les démonstrations. Trouver des fonctions propres du laplacien revient en général à résoudre des équations de Bessel ou de Legendre avec certaines conditions aux limites. Nous utiliserons les propriétés de ces fonctions sans remonter à leur interprétation en terme de théorie des groupes. Notons que beaucoup de formules qu'on trouve dans les nombreux traités consacrés aux fonctions de Legendre (par exemple [?], [?]) deviennent indéterminées pour des valeurs entières ou demi-entières des paramètres (comparer par exemple les comportements des fonctions $(A.3.20) - (A.3.26)$). C'est une source de complications mais on constate qu'à l'instar de ce qui se passe en physique, ces cas sont précisément ceux qui nous serons utiles. Il a donc été nécessaire de regrouper en annexe de nombreuses formules, établies en nous appuyant le plus souvent sur le traité de L. Robin ([?], [?] et [?]).

Nous nous sommes efforcés de montrer dans cette introduction que derrière tous ces calculs parfois lourds se trouvent quelques considérations géométriques simples.

Première partie

Résultats généraux

Chapitre 1

Développement de Karhunen-Loève des processus gaussiens et applications statistiques

Dans ce chapitre, nous donnons des résultats généraux concernant les processus gaussiens et certains processus empiriques.

L'un des principaux est le Théorème 1.3.1 p. 36 qui porte sur le développement de Karhunen-Loève des processus gaussiens centrés.

Lorsqu'un un tel processus est défini sur un espace compact T et que sa fonction de covariance y est continue, le Théorème 1.3.1 est un résultat classique, conséquence directe du théorème de Mercer, et démontré dans de multiples ouvrages. Voir par exemple [?] paragraphe 37.5 p. 143-144, [?] Proposition 3.11 p. 49, [?] Théorème 3.16 p. 75. Malheureusement, de nombreux processus utiles en statistiques, sont définis sur un espace non-compact, comme l'intervalle $(0,1)$ pour le processus d'Anderson-Darling. Dans ce cas il existe bien sûr des résultats. Voir ainsi dans [?] le paragraphe suivant la relation (4.6) p. 198, ou [?], Théorème 2 p. 210. Mais ils nécessitent souvent de se replonger pour chaque cas particulier dans des calculs sur les noyaux intégraux et leurs propriétés dans divers espaces de Hilbert.

Le Théorème 1.3.1 ne fait intervenir que deux hypothèses assez faibles et simples sur la fonction de covariance (voir (1.3.31) et (1.3.32) p. 36), satisfaites dans l'immense majorité des cas intéressants en statistiques. Donnons un exemple de l'intérêt d'un tel résultat. Un des sous-produits des D-K-L concerne l'analyse harmonique et la théorie des fonctions spéciales. La résolution de l'équation intégrale $(0.1.2 - 0.1.3)$ permet d'obtenir un dévelopement du type (0.1.1), fournissant ainsi des identités intéressantes. Le dévelopement correspondant au pont brownien donne par exemple

$$\min(s,t) - st = 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(k\pi s)\sin(k\pi t)}{k^2\pi^2} \quad \text{pour } 0 \leq s,t \leq 1. \tag{1.0.1}$$

De même une conséquence du Théorème 4.5.1 p. 114 est pour $\mu > 0$ et $s,t \in (0,1)$, la série impliquant les fonctions de Legendre

$$\begin{aligned}&\{\frac{\min(s,t) - st}{\sqrt{s(1-s)t(1-t)}}\}^{\mu}\\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu}{(\mu+k-1)(\mu+k)} \frac{(2\mu+2k-1)\Gamma(2\mu+k)}{(k-1)!} P_{\mu+k-1}^{-\mu}(2s-1) P_{\mu+k-1}^{-\mu}(2t-1).\end{aligned} \tag{1.0.2}$$

Pour le pont brownien on a $T = [0,1]$ et le théorème de Mercer assure la convergence uniforme dans (1.0.1). Plus généralement, on établit facilement la convergence dans $L^2(T \times T)$ de la série (0.1.1) dans le cas général, et la convergence uniforme quand la covariance est continue sur $T \times T$ compact. Ce n'est pas le cas dans (1.0.2), ou encore pour le cas étudié dans [?] dont les relations $(1.92)-(1.93)$ du Corollaire 1.4 donnent des séries faisant intervenir les fonctions de Bessel et convergeant dans L^2. Notre résultat permet d'affirmer que la convergence est ponctuelle et uniforme sur tout compact de $T \times T$ pour toutes ces séries.

Nous appuierons notre démonstration sur les propriétés des espaces gaussien et autoreproduisant associés à un processus gaussien, dont nous rappelons les propriétés dans la section 1.2. Un résultat clé est la Proposition 1.3.3. Après l'énoncé du théorème principal dans la section 1.3, nous introduisons dans la section 1.4 les fonctions de covariance triangulaires, qui interviendront dans tous les chapitres suivants. Enfin les sections 1.5 et 1.6 donnent diverses propriétés asymptotiques du processus empirique uniforme, notamment une loi du logarithme itéré pour le pont brownien pondéré.

Commençons par préciser quelques notations.

1.1 Définitions, notations

Soit $d \geq 1$ un entier et $T = T_1 \times ... \times T_d \subseteq \mathbb{R}^d$, où T_i est un intervalle de $\mathbb{R}$ pour $i = 1, ..., d$. On note $\mathcal{T}$ la tribu des boréliens de T pour la topologie induite par la topologie usuelle de $\mathbb{R}^d$. Soit μ une mesure de radon positive sur T absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue. Nous notons m sa densité, de sorte qu'on a $\mu(dt) = d\mu(t) = m(t)dt$. On note $(.|.)$ et $||.||_2$ respectivement le produit scalaire et la norme dans $L^2(T, \mathcal{T}, \mu) = L^2(T, \mu)$ définis par

$$(f|g) = \int_T f(t)g(t)d\mu(t)\,,\ ||f||_2 = (f|f)^{1/2} \text{ pour } f, g \in L^2(T, \mu).$$

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace de probabilité et $\mathbf{X} = \{\mathbf{X}(t, \omega) : t \in T, \omega \in \Omega\}$ un processus gaussien réel centré (*i.e.* $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ (t_1, ..., t_k, a_1, ..., a_k) \in T^k \times \mathbb{R}^k$, la variable aléatoire $a_1\mathbf{X}(t_1) + \cdots + a_k\mathbf{X}(t_k)$ est réelle, gaussienne et $\forall t \in T,\ \mathbb{E}\mathbf{X}(t) = 0$). Comme d'habitude, on sous-entendra généralement la dépendance des variables aléatoires par rapport à ω et on notera simplement $\mathbf{X} = \{\mathbf{X}(t) : t \in T\}$. La fonction de covariance K du processus gaussien $\mathbf{X}$ est définie pour $(s, t) \in T \times T$ par

$$K(s, t) = \mathbb{E}\mathbf{X}(s)\mathbf{X}(t).$$

Elle a les propriétés immédiates suivantes.

$$\forall t \in T \quad : \quad K(t, t) \geq 0, \tag{1.1.3}$$

$$\forall (s, t) \in T^2 \quad : \quad K(s, t) = K(t, s), \tag{1.1.4}$$

$$K^2(s, t) \leq K(s, s)K(t, t). \tag{1.1.5}$$

1.2 Deux espaces de Hilbert associés à un processus gaussien

Pour la démonstration des propriétés suivantes, voir par exemple [?], chapitres 1-3. On peut associer à un processus gaussien $\mathbf{X}$ de fonction de covariance K deux espaces de Hilbert. Tout d'abord un *espace gaussien* (*i.e.* un sous-espace vectoriel fermé de $L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$) noté $\mathbb{G}$, fermeture dans $L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$ de l'espace vectoriel de variables aléatoires gaussiennes

$$G_0(\mathbf{X}) = \big\{ \sum_{i=1}^{n} a_i \mathbf{X}(t_i) : n \geq 1 \text{ et pour } 1 \leq i \leq n, a_i \in \mathbb{R}, t_i \in T \big\}. \tag{1.2.6}$$

Le produit scalaire dans $\mathbb{G}$ est donné par

$$< \xi | \xi' >_{\mathbb{G}} = \mathbb{E}\big(\xi\xi'\big) \text{ pour } \xi, \xi' \in \mathbb{G}.$$

Ensuite l'espace de fonctions réelles $\mathbb{H}$, introduit par Aronszajn [**?**] et défini comme suit. L'espace vectoriel

$$H_0(\mathbf{X}) = \big\{ f : T \to \mathbb{R} : f(.) = \sum_{i=1}^{n} a_i K(t_i, .), a_i \in \mathbb{R}, t_i \in T, n \geq 1 \big\} \tag{1.2.7}$$

peut être muni d'un produit scalaire défini pour

$$f(.) = \sum_{i=1}^{n} a_i K(t_i, .) \text{ et } g(.) = \sum_{j=1}^{m} b_j K(t_j, .)$$

par

$$< f | g > = \sum_{i=1}^{n} a_i g(t_i) = \sum_{j=1}^{m} b_j f(t_j) = \sum_{1 \leq i \leq n} \sum_{1 \leq j \leq m} a_i b_j K(t_i, t_j). \tag{1.2.8}$$

Pour tout $f \in H_0$, $t \in T$, on a la propriété dite d'auto-reproduction

$$f(t) = < f | K(t, .) >, \tag{1.2.9}$$

et l'inégalité de Cauchy-schwarz s'écrit donc

$$f(t)^2 = < f, K(t, .) >^2 \leq K(t, t) < f | f >, \ \forall t \in T, \ \forall f \in \mathbb{H}. \tag{1.2.10}$$

On obtient une norme en posant

$$||f|| = < f | f >^{1/2} . \tag{1.2.11}$$

Le complété de H_0 pour cette norme est *l'espace de Hilbert auto-reproduisant* associé à $\mathbf{X}$. Nous noterons $< .|. >$ et $||.||_{\mathbb{H}}$ les extensions respectives à $\mathbb{H}$ tout entier du produit scalaire et de la norme définis sur $H_0(\mathbf{X})$. On a l'isomorphisme d'espaces de Hilbert

$$\begin{array}{cccc} \iota : & \mathbb{G} & \to & \mathbb{H} \\ & \xi & \mapsto & \mathbb{E}\big[\xi \mathbf{X}(.)\big]. \end{array}$$

Pour simplifier les notations, nous noterons $< .|. >_{\mathbb{G}} = < .|. >$. On a donc, en vertu de l'isomorphisme précédent,

$$\forall (\xi, \xi') \in \mathbb{G}, \ < \xi | \xi' > = < \iota(\xi) | \iota(\xi') > .$$

Lorsque les espaces $\mathbb{G}$ et $\mathbb{H}$ sont séparables, ils admettent des bases orthonormales hilbertiennes de même cardinal au plus dénombrables $N_{\mathbf{X}} \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$. On a un premier résultat pour le développement de $\mathbf{X}$ en série de variables gaussiennes orthogonales, avec la Proposition 1.2.1 qui suit. Pour la démontrer, nous aurons besoin du lemme préliminaire suivant (démontré dans [?] Théorème 4.1 p. 40, cité dans [?] Lemme 3.9 p. 71).

Lemme 1.2.1. *Soit Z_n une suite de variables aléatoires indépendantes, symétriques à valeurs dans un espace de Banach réel $\mathcal{B}$ muni de la topologie induite par la norme. Soit $Y_n = \sum_{k=1}^n Z_k$. Alors Y_n converge presque sûrement si et seulement si il existe une variable aléatoire Y à valeurs dans $\mathcal{B}$ telle que pour tout x^* appartenant au dual topologique de $\mathcal{B}$ on ait la convergence en probabilité : $x^*(Y_n) \to x^*(Y)$.*

Proposition 1.2.1. *Soit $\mathbf{X} = \{\mathbf{X}(t) : t \in T\}$ un processus gaussien centré de fonction de covariance K dont l' espace gaussien $\mathbb{G}$ et l'espace auto-reproduisant $\mathbb{H}$ associés sont séparables. Si on note $\{\xi_k : 1 \leq k \leq N_{\mathbf{X}}\}$ une base orthonormale de $\mathbb{G}$ et $\{h_k : 1 \leq k \leq N_{\mathbf{X}}\}$ la base orthonormale de $\mathbb{H}$ qui lui correspond par l'isomorphisme ι, on a pour tout $s \in T$*

$$\mathbf{X}(s) = \sum_{k=1}^{N_{\mathbf{X}}} h_k(s)\,\xi_k \quad \text{dans } (\mathbb{G}, \|.\|_{\mathbb{G}}) \quad \text{et p.s.,} \tag{1.2.12}$$

$$K(s,.) = \sum_{k=1}^{N_{\mathbf{X}}} h_k(s) h_k \quad \text{dans } (\mathbb{H}, \|.\|_{\mathbb{H}}). \tag{1.2.13}$$

Pour tout couple $(s,t) \in T \times T$ on a

$$K(s,t) = \sum_{k=1}^{N_{\mathbf{X}}} h_k(s) h_k(t). \tag{1.2.14}$$

La série précédente est absolument convergente, et si K est continue sur $T \times T$, elle est uniformément convergente sur $S \times S$ pour tout compact $S \subseteq T$.

Démonstration. Mis à part la convergence presque sûre dans (1.2.12) et l'absolue convergence de la série (1.2.14), cette proposition découle de [?] Proposition 3.7 p. 42. Pour la convergence presque sûre dans (1.2.12), appliquons le Lemme 1.2.1 en prenant $\mathcal{B} = \mathbb{G}$, $Z_k = \xi_k h_k(s)$, $Y_n = \sum_{k=1}^n Z_k$. Tout élement du dual topologique de $\mathbb{G}$ est de la forme $\mathbb{E}(\xi.)$ avec $\xi \in \mathbb{G}$. Pour tout ξ, on a d'après la première assertion dans (1.2.12) : $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(\xi Y_n) = \mathbb{E}(\xi \mathbf{X}(s))$. Donc pour tout s, Y_n a une limite presque sûre $Y(s)$. La convergence a bien sûr aussi lieu en probabilité. Mais pour une suite gaussienne, la convergence en probabilité implique la convergence en moyenne quadratique ([?] Lemme 1.5 p. 16), donc ici pour la norme $\|\ \|_{\mathbb{G}}$. Or pour cette norme, Y_n converge vers $\mathbf{X}(s)$ en vertu de la première assertion dans (1.2.12). Par unicité de la limite, on

a $Y = \mathbf{X}(s)$ et la convergence presque sûre dans (1.2.12) est établie.
Quant à l'absolue convergence de la série (1.2.14) (dans le cas non trivial $N_{\mathbf{X}} = \infty$), elle est une conséquence de sa convergence simple. En effet, soit $(s,t) \in T^2$ et $\varepsilon > 0$. Les séries $\sum_{k=1}^{\infty} h_k(s)^2$ et $\sum_{k=1}^{\infty} h_k(t)^2$ convergent vers $K(s,s)$ et $K(t,t)$ respectivement. Il existe donc un entier N tel que pour $p, q \geq N$, on ait

$$\sum_{k=p}^{k=q} h_k(s)^2 < \varepsilon \ , \ \sum_{k=p}^{k=q} h_k(s)^2 < \varepsilon.$$

Alors, quels que soient $p, q \geq N$,

$$\sum_{k=p}^{k=q} |h_k(s)h_k(t)| \leq \Big\{ \sum_{k=p}^{k=q} h_k(s)^2 \Big\}^{1/2} \Big\{ \sum_{k=p}^{k=q} h_k(t)^2 \Big\}^{1/2} < \varepsilon.$$

Le résultat en découle. □
On a un résultat supplémentaire lorsque le processus a des trajectoires presque sûrement continues.

Lemme 1.2.2. *Si $\mathbf{X}$ a des trajectoires presque sûrement continues, la convergence de la série* (1.2.12) *est presque sûrement uniforme sur S pour tout compact $S \subseteq T$.*

Remarque 1.2.1. Dans [?] Théorème 3.8 p. 71, on trouve un énoncé similaire mais sans la restriction «sur S compact». Dans ce théorème, T est implicitement supposé compact. En effet si on ne se place pas sur un compact on perd la convergence uniforme presque sûre dans (1.2.12) comme le montre le contre-exemple du processus d'Anderson-Darling (voir plus loin à la suite du Théorème 1.3.1 36). Pour la démonstration du Lemme 1.2.2 dans le cas général, nous reprenons celle de [?] Théorème 3.8 p.71 en l'adaptant au cas où T n'est pas compact. Une première étape consiste à reformuler le Lemme 3.10 p.71 dans [?] sur laquelle elle s'appuie et qui s'énonce :

> **Lemme** Si $\{h_k : k \geq 1\}$ est une base orthonormale de $\mathbb{H}$, alors $\sum_{k=1} h_k^2(t)$ converge uniformément sur T vers $K(t,t)$.

Ce lemme suppose aussi implicitement T compact (voir un contre-exemple dans le Lemme 1.3.6 p. 38). Lorsque T n'est pas compact l'application du théorème de Dini permet seulement d'énoncer :

Lemme 1.2.3. *La relation* (1.2.14) *implique la convergence simple de $\sum_{k=1} h_k^2(t)$ sur T vers $K(t,t)$, et cette convergence est uniforme sur tout compact $S \subseteq T$.*

Nous partirons de ce résultat pour notre démonstration.
Démonstration. du Lemme 1.2.2 (d'après [?] p.72). Si $\mathbf{X}$ est à trajectoires presque sûrement continues, $\mathbf{X}$ est continu en moyenne quadratique ce qui implique que K est continue et donc aussi la fonction h_k pour tout $k \geq 1$ ([?] Proposition 3.6 p. 40). Soit un compact $S \subseteq T$ et $\mathcal{B}_S$ l'espace de Banach des fonctions réelles continues sur S. Notons $\tilde{\mathbf{X}}$ et $\tilde{h_k}$ les resrictions à S de $\mathbf{X}$ et h_k. On peut considérer $\tilde{\mathbf{X}}$ et $Z_k := \xi_k \tilde{h}_k$ comme

des variables aléatoires dans $\mathcal{B}_S$. Tout élément x^* du dual topologique de $\mathcal{B}_S$ est une mesure borélienne signée finie x^* sur S. Posons $Y_n = \sum_{k=1}^n Z_k$. On a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}|x^*(Y_n) - x^*(\tilde{\mathbf{X}})| &= \mathbb{E}\int_S |Y_n(t) - \tilde{\mathbf{X}}(t)|x^*(dt) && (1.2.15)\\
&\leq \int_S \mathbb{E}|Y_n(t) - \tilde{\mathbf{X}}(t)|x^*(dt) && (1.2.16)\\
&\leq \int_S \left(\mathbb{E}|Y_n(t) - \tilde{\mathbf{X}}(t)|^2\right)^{1/2} x^*(dt) && (1.2.17)\\
&= \int_S \Big(\sum_{k=n+1}^{\infty} \tilde{h}_k^2(t)\Big)^{1/2} |x^*|(dt) && (1.2.18)
\end{aligned}$$

où $|x^*|(A)$ est la variation totale de x^* sur $A \subseteq T$. La convergence uniforme de $\sum_{k=n+1}^{\infty} \tilde{h}_k^2(t)$ vers 0 obtenue au Lemme 1.2.3 et l'inégalité de Tchebitcheff permettent de conclure que $x^*(Y_n)$ tend en probabilité vers 0 quel que soit x^*. Donc le Lemme 1.2.1 assure que Y_n converge presque sûrement vers $\tilde{\mathbf{X}}$ pour la norme $\| \|_\infty$. □

1.3 Hypothèses sur la fonction de covariance

Envisageons les deux hypothèses suivantes sur la fonction de covariance K.

$H1$: Pour μ-presque tout $t \in T$, on a $\lim_{s\to t}\big\{K(s,s) - 2K(s,t) + K(t,t)\big\} = 0$;

$H2$: $\int_T K(t,t)d\mu(t) < \infty$.

Rappelons tout d'abord qu'un processus gaussien est continu au point $t \in T$ en probabilité si et seulement si il l'est en moyenne quadratique (voir [?], remarque suivant la Proposition 3.6 p. 40). Ensuite, en tout point $t \in T$ tel que

$$\lim_{s\to t}\{K(t,t) + K(s,s) - 2K(s,t)\} = 0,$$

on a

$$\lim_{s\to t} \mathbb{E}\{\mathbf{X}(s) - \mathbf{X}(t)\}^2 = 0,$$

donc le processus $\mathbf{X}$ est continu en moyenne quadratique et par conséquent en probabilité au point t.

Donc sous l'hypothèse H1, $\mathbf{X}$ est continu en probabilité sur μ-presque tout T. On sait qu'alors (voir par exemple [?] Théorème 1 p. 219 et la Remarque 1 p. 221), il existe un processus $\tilde{\mathbf{X}}$ équivalent à $\mathbf{X}$ (i.e $\forall t \in T, P\big\{\mathbf{X}(t) = \tilde{\mathbf{X}}(t)\big\} = 1$), avec $\tilde{\mathbf{X}}$ séparable et mesurable (*i.e.* tel que la fonction $\tilde{\mathbf{X}}(t,\omega)$ soit mesurable sur $T \times \Omega$). Dans ce cas chaque trajectoire $\mathbf{X}(.,\omega)$ est une fonction mesurable sur T.

Si H1 est vérifiée, nous supposerons donc que le processus de départ $\mathbf{X}$ *est séparable et* *mesurable.*

Une autre implication de H1 est la suivante.

Lemme 1.3.1. *Si H1 est satisfaite, K est continue $\mu \otimes \mu$-presque partout sur $T \times T$, donc mesurable, et la fonction $t \mapsto K(t,t)$ est continue μ-presque partout sur T.*

Démonstration. On a vu que H1 entraine la continuité en moyenne quadratique de $\mathbf{X}$ en μ-presque tout $t \in T$. Or pour $(s,t,s',t') \in T^4$, on a

$$\begin{aligned}
&|K(s,t) - K(s',t')| = |\mathbb{E}\{\mathbf{X}(s)\mathbf{X}(t) - \mathbf{X}(s')\mathbf{X}(t')\}|| \\
&\le |\mathbb{E}\{\mathbf{X}(s) - \mathbf{X}(s')\}\{\mathbf{X}(t) - \mathbf{X}(t')\}| + |\mathbb{E}\{\mathbf{X}(s')(\mathbf{X}(t) - \mathbf{X}(t')\}| \\
&\quad + |\mathbb{E}\{\mathbf{X}(s) - \mathbf{X}(s')\}\mathbf{X}(t')| \\
&\le ||\mathbf{X}(s) - \mathbf{X}(s')||_2 ||\mathbf{X}(t) - \mathbf{X}(t')||_2 + ||\mathbf{X}(s')||_2 ||\mathbf{X}(t) - \mathbf{X}(t')||_2 \\
&\quad + ||\mathbf{X}(s) - \mathbf{X}(s')||_2 ||\mathbf{X}(t')||_2.
\end{aligned}$$

Donc si $\mathbf{X}$ est continu en moyenne quadratique en s' et t', K est continue au point (s',t'). Donc sous l'hypothèse H1, K est continue $\mu \otimes \mu$-presque partout sur $T \times T$. En prenant $s = t$ et $s' = t'$ dans le calcul ci-dessus, on voit de même que $t \mapsto K(t,t)$ est continue μ-presque partout sur T. □

Lemme 1.3.2. *Si K vérifie H1 et H2, on a $\mathbb{H} \subseteq L^2(T,\mu)$ et pour tout $f \in \mathbb{H}$,*

$$||f||_2^2 \le ||f||_{\mathbb{H}}^2 \int_T K(t,t) d\mu(t). \tag{1.3.19}$$

Démonstration. Pour $f \in \mathbb{H}$, l'inégalité (1.2.10) donne, en intégrant sur T, $\int_T f^2(t) d\mu(t) < \infty$ et (1.3.19). □

Proposition 1.3.1. *Sous les hypothèses H1 et H2 on a les propriétés suivantes.*

$$P1 \quad : \quad \iint_{T\times T} K^2(s,t) d\mu(s) d\mu(t) < \infty; \tag{1.3.20}$$

$$P2 \quad : \quad \mathbb{E}\int_T \mathbf{X}^2(t) d\mu(t) = \int_T K(t,t) d\mu(t); \tag{1.3.21}$$

$$P3 \quad : \quad P\big\{\mathbf{X}(.,\omega) \in L^2(T,\mu)\big\} = 1. \tag{1.3.22}$$

Démonstration. H1 étant satisfaite, on sait d'après le lemme précédent que la fonction K est mesurable. On obtient P1 grâce à l'inégalité (1.1.5) p. 27 et au Théorème de Fubini appliqué à la fonction positive et $\mu \otimes \mu$-mesurable $(s,t) \mapsto K(s,s)K(t,t)$, qui permettent d'écrire

$$\begin{aligned}
\int_{T\times T} K^2(s,t) d\mu(s) d\mu(t) &\le \int_{T\times T} K(s,s)K(t,t) d\mu(s) d\mu(t) \\
&= \Big\{\int_T K(t,t) d\mu(t)\Big\}^2 < \infty.
\end{aligned}$$

On a vu plus haut que sous H1, le processus $\mathbf{X}$ peut être supposé mesurable En appliquant le Théorème de Fubini à la fonction positive mesurable $\mathbf{X}^2(t,\omega)$ on obtient l'égalité

$$\int_\Omega \{ \int_T \mathbf{X}^2(t,\omega)d\mu(t)\}dP(\omega) = \int_{T\times\Omega} \mathbf{X}^2(t,\omega)d\mu(t)dP(\omega) = \int_T \mathbb{E}\mathbf{X}^2(t)d\mu(t)$$

qui n'est autre que P2. P3 en découle immédiatement. $\square$

1.3.1 Opérateur intégral associé à la fonction de covariance

Lorsque la propriété P1 de la Proposition 1.3.1 est vérifiée, on peut associer à la fonction K un opérateur (*i.e.* un endomorphisme continu) $\mathcal{K}$ sur $L^2(T,\mu)$ tel que

$$\forall f \in L^2(T,\mu) \ : \ \mathcal{K}f(t) = \int_T K(s,t)f(s)d\mu(s) \ \text{ pour } \mu-\text{presque tout } t. \tag{1.3.23}$$

Voir à ce sujet par exemple [?], chapitre 3. Dans le cas présent, K est une fonction de covariance et la propriété (1.1.5) jointe à P1 assure que pour tout t la fonction $s \mapsto K(s,t)$ est dans $L^2(T,\mu)$ et on peut poser

$$\forall f \in L^2(T,\mu) \ : \ \mathcal{K}f(t) = \int_T K(s,t)f(s)d\mu(s) \ \text{ pour tout } t. \tag{1.3.24}$$

Rappelons les faits suivants de la théorie des opérateurs intégraux. L'opérateur $\mathcal{K}$ est symétrique (*i.e.* $\forall f,g \in L^2(T,\mu) \ : \ (\mathcal{K}f|g) = (f|\mathcal{K}g)$) et compact (l'image de la boule unité a une adhérence compacte). Il en découle les propriétés suivantes ([?], chapitres 4 et 5). Il existe une base orthonormale de $L^2(T,\mu)$ formée de fonctions propres de $\mathcal{K}$. Le seul point d'accumulation possible pour l'ensemble des valeurs propres de $\mathcal{K}$ est 0. L'espace propre associé à une valeur propre non nulle est de dimension finie. Deux fonctions propres associées à des valeurs propres distinctes sont orthogonales.
Rappelons aussi qu'un opérateur A de $L^2(T,\mu)$ est dit *positif* si pour tout $f \in L^2(T,\mu)$ on a $(Af|f) \geq 0$, et que pour un opérateur symétrique compact, il est équivalent de dire que toutes ses valeurs propres sont positives ou nulles (on le voit en utilisant la décomposition de $L^2(T,\mu)$ en somme directe de sous espaces propres de A). Résumons.

Proposition 1.3.2. *Si K vérifie H1 et H2, on peut lui associer l'opérateur intégral $\mathcal{K}$ de noyau K défini par* (1.3.24). *Cet opérateur est symétrique et compact.*

Un lien entre cet opérateur et l'espace autoreproduisant associés au processus $\mathbf{X}$ apparait dans le lemme suivant.

Lemme 1.3.3. *Soit K vérifiant H1 et H2. Si $f \in L^2(T,\mu)$ alors $\mathcal{K}f \in \mathbb{H}$ et pour tout $h \in \mathbb{H}$, $< \mathcal{K}f|h >= \int_T f\, hd\mu = (f|h)$.*

Démonstration. Soit $f \in L^2(T,\mu)$. Du fait que (1.3.22) est vérifiée, on définit bien une forme linéaire sur $\mathbb{G}$ en posant

$$\begin{array}{rcl} f^* : \ G_K & \rightarrow & \mathbb{R} \\ \xi & \mapsto & \mathbb{E}\big\{\xi(\omega)\int_T \mathbf{X}(s,\omega)f(s)ds\big\} = \mathbb{E}\big\{\xi\,(\mathbf{X}|f)\,\big\}\,. \end{array}$$

C'est un élément du dual topologique $\mathbb{G}^*$ de l'espace de Hilbert $\mathbb{G}$. En effet f^* est continue d'après le calcul suivant :

$$\begin{array}{rcl} |\mathbb{E}\big\{(\mathbf{X}|f)\xi\big\}| & \leq & \big\{\mathbb{E}(f|\mathbf{X})^2\mathbb{E}\xi^2\big\}^{1/2} \\ & \leq & \big\{\mathbb{E}(||f||_2^2||\mathbf{X}||_2^2)\mathbb{E}\xi^2\big\}^{1/2} \\ & = & ||f||_2||\xi||_2\sqrt{\int_T K(t,t)d\mu(t)}, \end{array}$$

où pour la dernière ligne, on a utilisé (1.3.21). Par conséquent il existe $\xi_f \in \mathbb{G}$ tel que : $\forall \xi \in \mathbb{G},\ f^*(\xi) =< \xi_f|\xi >= \mathbb{E}(\xi\xi_f)$. En particulier, pour tout $t \in T$,

$$f^*\big\{\mathbf{X}(t)\big\} = \mathbb{E}\big\{\mathbf{X}(t)\xi_f\big\} = \mathbb{E}\big\{\mathbf{X}(t)\int_T f(s)\mathbf{X}(s)ds\big\} = \int_T K(s,t)f(s)d\mu(s).$$

Pour obtenir la dernière égalité, on a appliqué le théorème de Fubini à la fonction intégrable $s \mapsto f(s)\mathbf{X}(s)\mathbf{X}(t)$. Cette égalité implique $\iota(\xi_f) = \mathcal{K}f$ et assure que $\mathcal{K}f \in \mathbb{H}$. De plus, pour tout $t \in T$, on obtient

$$\begin{array}{l} < \mathcal{K}f|K(.,t) >=< \iota\{\xi_f\}|\iota\{\mathbf{X}(t)\} >=< \xi_f|\mathbf{X}(t) > \\ \qquad\qquad = f^*\big\{\mathbf{X}(t)\big\} = \int_T K(s,t)f(t)d\mu(s) = (f|K(.,t)). \end{array}$$

Donc les formes linéaires définies sur $\mathbb{H}$ par $\phi_1 : h \mapsto < \mathcal{K}f|h >$ et $\phi_2 : h \mapsto (h|f)$ coïncident sur l'espace H_0 qui est dense dans $\mathbb{H}$. Or ces deux formes sont continues (cela est évident pour ϕ_1 et découle de (1.3.19) et de l'inégalité de schwarz pour ϕ_2). Elles coïncident donc sur $\mathbb{H}$ et $\forall h \in \mathbb{H},\ < \mathcal{K}\,f|h >= (f|h)$. □

Corollaire 1.3.1. *Si K vérifie $H1$ et $H2$, l'opérateur intégral associé $\mathcal{K}$ est positif.*

Démonstration. D'après la Proposition 1.3.2, $\mathcal{K}$ est symétrique compact, il suffit donc de montrer ques ses valeurs propres sont positives ou nulles. Soit f une fonction propre de $\mathcal{K}$ associée à une valeur propre $\lambda \neq 0$. On a, d'après le Lemme 1.3.3, $\lambda f = \mathcal{K}f \in \mathbb{H}$ donc $f \in \mathbb{H}$. On a donc d'après ce même lemme la relation $< \mathcal{K}f|f >= (f|f)$, qui s'écrit $< \lambda f|f >= (f|f)$, et donc $\lambda = ||f||_2^2/||f||_{\mathbb{H}}^2 > 0$. □

Les valeurs propres de $\mathcal{K}$ étant positives avec 0 pour seul point d'accumulation possible, on peut adopter les notations suivantes.

Soit N_K la somme (éventuellement infinie) des dimensions des espaces propres associés aux valeurs propres non nulles. On a $N_K \geq 1$ et on peut noter

$$\lambda_1 \geq ... \geq \lambda_k \geq ... > 0\ , \quad 1 \leq k \leq N_K, \tag{1.3.25}$$

la suite décroissante des valeurs propres non nulles, répétée chacune avec son ordre (toujours fini on l'a vu plus haut) de multiplicité. En prenant pour chaque espace propre une base orthonormale, et ces espaces propres étant orthogonaux entre eux, on voit qu'il existe un ensemble $\{f_k : 1 \leq k \leq N_K\}$ d'éléments de $L^2(T, \mu)$ tel que

$$\mathcal{K} f_k = \lambda_k f_k, \qquad 1 \leq k \leq N_K \tag{1.3.26}$$

$$(f_k | f_\ell) = \int_T f_k(s) f_\ell(s) d\mu(s) = \begin{cases} 1 & \text{si } \ell = k, \\ 0 & \text{si } \ell \neq k \,, \end{cases} \qquad 1 \leq k, \ell \leq N_K. \tag{1.3.27}$$

0n a alors l'égalité (voir par exemple [?], chapitre 3, Théorème 14 p.63), dans $L^2(T \times T, \mu \otimes \mu)$,

$$K \quad = \quad \sum_{k=1}^{N_K} \lambda_k f_k \otimes f_k \,, \tag{1.3.28}$$

où pour f et g deux fonctions sur T, $f \otimes g$ désigne la fonction définie sur $T \times T$ par $f \otimes g(s,t) := f(s)g(t)$. En prenant, dans (1.3.28) le carré des normes des fonctions dans $L^2(T \times T, \mu \otimes \mu)$ on obtient

$$\int_{T \times T} K^2(s,t) d\mu(s) d\mu(t) \quad = \quad \sum_{k=1}^{N_K} \lambda_k^2. \tag{1.3.29}$$

Enfin, si on note $\mathrm{Hilb}(f_k : k \geq 1)$ le sous-espace de Hilbert engendré par les fonctions $f_k, 1 \leq k \leq N_K$, on a la décomposition en somme directe hilbertienne

$$L^2(T, \mu) = \mathrm{Ker}\, \mathcal{K} \oplus \mathrm{Hilb}(f_k : k \geq 1). \tag{1.3.30}$$

Remarque 1.3.1. L'égalité (1.3.26) dans $L^2(T, \mu)$ signifie *a priori* qu'on a

$$\mathcal{K} f(t) = \lambda_k f_k(t) \text{ pour } \mu\text{-presque tout } t \in T.$$

Mais si K est continue sur $T \times T$, on peut trouver parmi les représentants d'une même classe dans $L^2(T, \mu)$, une fonction f_k qui soit continue, pour tout $k \geq 1$ (pour la démonstration de cette propriété, voir par exemple [?] p. 350). Comme dans ce cas la fonction $t \mapsto \int_T K(s,t) f(s) d\mu(t)$ est également continue, on a

$$\mathcal{K} f(t) = \lambda_k f_k(t) \text{ pour tout } t \in T.$$

Nous sommes maintenant en mesure de prouver qu'il existe une base de $\mathbb{H}$ formée de vecteurs propres de $\mathcal{K}$.

Lemme 1.3.4. *Si K vérifie H1 et H2, et avec les notations ci-dessus, on a pour $1 \leq k \leq N_K$, $f_k \in \mathbb{H}$ et l'orthogonal de $\left\{f_k : 1 \leq k \leq N_K\right\}$ dans $\mathbb{H}$ est réduit à la fonction nulle.*

Démonstration. On a vu au début de la démonstration du Corollaire 1.3.1 que si $f \in L^2(T,\mu)$ est une fonction propre de $\mathcal{K}$ associée à une valeur propre non nulle, alors $f \in \mathbb{H}$. Donc $f_k \in \mathbb{H}$ pour $1 \le k \le N_K$. On a ensuite, pour $h \in \mathbb{H}$, et $h \in L^2(T,\mu)$, en utilisant le lemme précédent :

$$\begin{array}{llllll} < h|f_k >= 0, & 1 \le k \le N_K & \Rightarrow & < h|\lambda_k f_k >= 0, & 1 \le k \le N_K & \Rightarrow \\ < h|\mathcal{K} f_k >= 0, & 1 \le k \le N_K & \Rightarrow & (h|f_k) = 0, & 1 \le k \le N_K & \Rightarrow \\ h \in \operatorname{Ker} \mathcal{K} \quad \Rightarrow & (\mathcal{K}h|h) = 0 & \Rightarrow & < h|h >= 0 & \Rightarrow h = 0. & \end{array}$$

□

On a donc démontré le résultat suivant.

Proposition 1.3.3. *Si K est la fonction de covariance d'un processus gaussien et vérifie H1 et H2, et avec les notations* $(1.3.24) - (1.3.27)$ *ci-dessus, la famille* $\big\{\sqrt{\lambda_i} f_i : 1 \le i \le N_K\big\}$ *est une base orthonormale de* $\mathbb{H}$.

Ce résultat implique en particulier les égalités $\dim L^2(T,\mu) = N_K = N_{\mathbf{X}} = \dim \mathbb{H}$. On est donc dans le cas où les espaces $\mathbb{G}$ et $\mathbb{H}$ sont séparables.

1.3.2 Théorème sur les développements de Karhunen-Loève

Des résultats précédents, en particulier de la Proposition 1.2.1 p. 29 (avec $\mathcal{B} = L^2(T,\mu)$), du Lemme 1.2.2 p. 30 et de la Proposition 1.3.3, découle le théorème suivant.

Théorème 1.3.1. *Soit $\{\mathbf{X}(t) : t \in T\}$ un processus gaussien centré, dont la fonction de covariance vérifie l'hypothèse*

$$H1 \ : \ \textit{Pour } \mu\textit{-presque tout } t \in T, \ \textit{on a } \lim_{s \to t} \big\{ K(s,s) - 2K(s,t) + K(t,t) \big\} = 0\,. \tag{1.3.31}$$

Alors K est mesurable, et à équivalence près, $\mathbf{X}$ est séparable et mesurable. Si K vérifie en outre

$$H2 \ : \ \int_T K(t,t) d\mu(t) < \infty\,, \tag{1.3.32}$$

alors

$$\mathbb{P}\Big(\int_T \mathbf{X}^2(t) d\mu(t) < \infty \Big) = 1 \tag{1.3.33}$$

et les espaces associés $\mathbb{G}$ et $\mathbb{H}$ sont séparables. Il existe $N_K \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$ et un ensemble $\{(f_k,\lambda_k) \in L^2(T,\mu) \times (0,\infty) : 1 \le k \le N_K\}$ vérifiant les relations $(1.3.24) - (1.3.27)$ *ci-dessus et tel que la famille $\big\{\sqrt{\lambda_i} f_k : 1 \le k \le N_K\big\}$ soit une base orthonormale de $\mathbb{H}$..*

On a pour tout $s \in T$

$$K(s,.) = \sum_{k=1}^{N_K} \lambda_k \, f_k(s) \, f_k(.) \quad \textit{dans } \mathbb{H}, \tag{1.3.34}$$

et il existe une suite $\{\xi_k : 1 \leq k \leq N_K\}$ *de variables* $N(0,1)$ *formant une base orthonormale de* $\mathbb{G}$, *et telle que pour tout* $s \in T$,

$$\mathbf{X}(s) \;=\; \sum_{k=1}^{N_K} \lambda_k^{1/2} f_k(s)\, \xi_k \quad \textit{dans } \mathbb{G} \textit{ et p.s.} \tag{1.3.35}$$

Si $\mathbf{X}$ *a des trajectoires presque sûrement continues, la série* (1.3.35) *converge presque sûrement uniformément sur tout compact* $S \subseteq T$.
On a dans $L^2(T \times T, \mu \otimes \mu)$

$$K \;=\; \sum_{k=1}^{N_K} \lambda_k f_k \otimes f_k\,, \tag{1.3.36}$$

et pour tout couple $(s,t) \in T \times T$

$$K(s,t) = \sum_{k=1}^{N_K} \lambda_k f_k(s) f_k(t). \tag{1.3.37}$$

La série (1.3.37) *est absolument convergente, et si* K *est continue sur* $T \times T$, *elle est uniformément convergente sur* $S \times S$ *pour tout compact* $S \subseteq T$.

On a aussi les propriétés utiles suivantes.

Proposition 1.3.4. *Sous les hypothèses et avec les notations du Théorème* 1.3.1 *on a*

$$\mathbb{E}\int_T \mathbf{X}^2(t)d\mu(t) \;=\; \int_T K(t,t)d\mu(t) = \sum_{k=1}^{N_K} \lambda_k, \tag{1.3.38}$$

$$\mathrm{Var}\int_T \mathbf{X}^2(t)d\mu(t) \;=\; 2\iint K^2(s,t)d\mu(s)d\mu(t) = 2\sum_{k=1}^{N_K} \lambda_k^2, \tag{1.3.39}$$

et pour tout $u \in \mathbb{R}$,

$$\mathbb{E}\exp\big\{iu\int_T \mathbf{X}^2(t)d\mu(t)\big\} = \prod_{k=1}^{N_K} \big(1 - 2iu\lambda_k\big)^{-1/2}. \tag{1.3.40}$$

Démonstration. La seconde égalité dans (1.3.38) découle de l'égalité $K(t,t) = \sum_1^{N_K} \lambda_k f_k^2(t)$ et du théorème de convergence dominée qu'on peut appliquer grâce à H2. Pour la première égalité dans (1.3.39) et pour (1.3.40), voir [**?**], formules (15)-(17) p. 212-213. Toutes les autre propriétés ont déjà été démontrées. □

Nous aurons également besoin du résultat suivant.

Lemme 1.3.5 (Grandes déviations). *Soit* $\mathbf{X}$ *un processus vérifiant toutes les hypothèses du Théorème* 1.3.1. *Si* λ_1 *désigne la première valeur propre de son D-K-L, on a, lorsque* $x \to \infty$,

$$\log P\Big(\int_T \mathbf{X}^2(t)d\mu(t) \geq x^2\Big) \sim -\frac{x^2}{2\lambda_1}. \tag{1.3.41}$$

Démonstration. Il suffit de prendre les logarithmes dans [?], relation (6). □

Nous sommes aussi en mesure de fournir les contre-exemples annoncés dans la Remarque 1.2.1 p. 30. Prenons une base de l'espace auto-reproduisant associé au processus d'Anderson-Darling formée de fonctions propres de son opérateur de covariance. Il suffit de prendre pour tout $k \geq 1$, la fonction de Legendre $P_k^{-1}(2t-1)$ qui est continue sur $[0,1]$ et s'annule en $t=0$. Si on avait la convergence uniforme presque sûre dans (1.2.12), le processus d'Anderson-Darling vérifierait

$$\mathbb{P}\big(\lim_{t\to 0} \frac{\mathbf{B}(t)}{\sqrt{t(1-t)}} = 0\big) = 1 \tag{1.3.42}$$

ce qui est manifestement faux.

Lemme 1.3.6. *Avec les notations de la Proposition* 1.2.1 *si* $\sum_{k=1}^{\infty} h_k^2(t)$ *converge uniformément sur* T *vers* $K(t,t)$ *alors la suite des fonctions* h_k *converge uniformément vers* 0 *sur* T. *Ce n'est pas le cas pour le processus*

$$X(t) = t^{-1/2}\mathbf{B}(t^{1/2}),\ t \in (0,1) \tag{1.3.43}$$

qui est tel que pour tout $k \geq 1$ *on a* $\sup_{0<t<1} |h_k(t)| = \infty$.

Démonstration. Le critère de Cauchy uniforme montre que la convergence uniforme de la série en question implique : $\forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall k \geq N, \forall t \in T, h_k^2(t) < \varepsilon$. Ensuite, d'après [?], égalité (1.28), pour le processus (1.3.43), il existe pour tout $k \geq 1$ deux constantes $c_k,\ d_k$ telles que $f_k = c_k t^{-1/2} J_1\big(d_k t^{1/4}\big)$ où J_1 est la fonction de Bessel d'indice 1. Or on peut prendre pour les fonctions h_k la base de $\mathbb{H}$ donnée par la Proposition 1.3.3 ; elles sont donc proportionnelles pour tout k aux f_k car le processus en question vérifie (1.3.31) et (1.3.32). Donc pour $t \to 0$ on a $h_k(t) \sim c_k\, t^{-1/4}$ avec $c > 0$. □

Pour noter un D-K-L, nous utiliserons une notation de la forme

$$\mathbf{X} = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{1/2}\ \xi_k\ f_k\,.$$

Le terme à gauche de ξ_k correspondra toujours à la racine carrée d'une valeur propre, le terme à droite à une fonction propre normalisée, les constantes de normalisation éventuelles étant toujours intégrées dans ce facteur. Les différents types de convergence ne seront pas toujours précisés. Il sufira de se reporter au Théorème 1.3.1 pour les préciser.

1.4 Fonctions de covariance triangulaires, pont brownien et processus de Wiener pondérés

Plaçons nous dans le cas où $T = (a,b)$ est un intervalle de $\mathbb{R}$. Pour les définitions et propriétés suivantes, voir par exemple [?].

Definition 1.4.1. *La fonction de covariance K est dite triangulaire s'il existe deux fonctions K_1 et K_2 définies, continues sur T telles que*

$$K_1 > 0\,, \quad K_2 > 0\,, \quad K_1/K_2 \text{ croissante sur } T \tag{1.4.44}$$

et

$$K(s,t) = K_1(s)K_2(t) \text{ pour } (s,t) \in T \times T \text{ et } s \leq t. \tag{1.4.45}$$

Si K_1 et K_2 sont dérivables, on peut introduire leur Wronskien W et on a

$$K_1/K_2 \text{ croissante sur } T \iff \forall t \in T,\ W_t\big\{K_1(t); K_2(t)\big\} := \begin{vmatrix} K_1(t) & K_2(t) \\ K_1'(t) & K_2'(t) \end{vmatrix} \leq 0\ . \tag{1.4.46}$$

On vérifie facilement que K est la fonction de covariance des processus définis sur T par

$$\mathbf{X}_1(t) = K_2(t)\mathbf{W}\big\{\frac{K_1}{K_2}(t)\big\}\,,\ \mathbf{X}_2(t) = K_1(t)\mathbf{W}\big\{\frac{K_2}{K_1}(t)\big\} \tag{1.4.47}$$

et

$$\mathbf{Y}_1(t) = \big(K_1(t) + K_2(t)\big)\,\mathbf{B}\big\{\frac{K_1}{K_1 + K_2}(t)\big\}\,,\ \mathbf{Y}_2(t) = \big(K_1(t) + K_2(t)\big)\,\mathbf{B}\big\{\frac{K_2}{K_1 + K_2}(t)\big\}. \tag{1.4.48}$$

On a pour la condition (1.3.32)

$$\int_T K(t,t)d\mu(t) < \infty \iff \int_T K_1(t)K_2(t)d\mu(t) < \infty. \tag{1.4.49}$$

On voit en utilisant la bilinéarité et l'antisymétrie du Wronskien que si la matrice réelle

$$g := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ avec } ad - bc > 0,$$

est telle $aK_1 + bK_2 > 0$ et $cK_1 + dK_2 > 0$, alors on obtient une nouvelle fonction de covariance triangulaire en posant

$$K_g(s,t) = (aK_1 + bK_2)(s) \cdot (cK_1 + dK_2)(t), \quad s \leq t. \tag{1.4.50}$$

C'est la fonction de covariance du processus

$$\mathbf{X}_g(t) = (cK_1 + dK_2)\,\mathbf{W}\big\{\frac{aK_1 + bK_2}{cK_1 + dK_2}(t)\big\}. \tag{1.4.51}$$

Definition 1.4.2. *On appelle fonction de poids sur T toute fonction mesurable $q\ :\ T \to [0,\infty)$.*

Les deux propositions suivantes sont évidentes, mais elles nous seront utiles car tous les processus que nous étudierons seront du type qui y est traité. Il s'agit du pont brownien ou du processus de Wiener pondérés. Nous nous y référerons donc systématiquement par la suite, sans avoir à repréciser dans chaque cas la totalité des notations et propriétés simples qui y sont données.

Proposition 1.4.1. *Soient $p : T \to [0,1]$ de classe C^1 strictement monotone et q une fonction de poids sur T, telles que*

$$\int_T q(t)p(t)\{1-p(t)\}d\mu(t) < \infty. \tag{1.4.52}$$

Si $\mathbf{B}$ désigne un pont brownien sur $[0,1]$, la fonction de covariance K du processus

$$\mathbf{X}(t) = \sqrt{q(t)}\,\mathbf{B}\big\{p(t)\big\}, \quad t \in T\,, \tag{1.4.53}$$

est triangulaire avec, pour p croissante,

$$K_1 = qp\,, \quad K_2 = q(1-p) \tag{1.4.54}$$

et donc

$$p = \frac{K_1}{K_1+K_2}, \quad q = K_1 + K_2. \tag{1.4.55}$$

Elle vérifie

$$\int_T K(t,t)d\mu(t) = \int_T q(t)p(t)\{1-p(t)\}d\mu(t) < \infty \tag{1.4.56}$$

On a presque sûrement

$$\int_T q(t)\mathbf{B}^2\big\{p(t)\big\}d\mu(t) < \infty. \tag{1.4.57}$$

Démonstration. (1.4.52) et (1.4.56) impliquent (1.4.57) grâce à (1.3.33). □

On a le résultat analogue suivant.

Proposition 1.4.2. *Soient $p : T \to [0,\infty)$ de classe C^1 strictement monotone et q une fonction de poids sur T, telles que*

$$\int_T q(t)p(t)d\mu(t) < \infty. \tag{1.4.58}$$

Si $\mathbf{W}$ désigne un processus de Wiener sur $[0,\infty)$, la fonction de covariance K du processus

$$\mathbf{X}(t) = \sqrt{q(t)}\,\mathbf{W}\big\{p(t)\big\}, \quad t \in T\,, \tag{1.4.59}$$

est triangulaire avec, pour p croissante,

$$K_1 = qp, \quad K_2 = q \tag{1.4.60}$$

et donc

$$p = \frac{K_1}{K_2}, \quad q = K_2. \tag{1.4.61}$$

Elle vérifie

$$\int_T K(t,t)d\mu(t) = \int_T q(t)p(t)d\mu(t) < \infty. \tag{1.4.62}$$

On a presque sûrement

$$\int_T q(t)\mathbf{W}^2\big\{p(t)\big\}d\mu(t) < \infty. \tag{1.4.63}$$

1.5 Convergence en norme L^2 du processus empirique pondéré

On a le résultat suivant pour le processus empirique pondéré.

Proposition 1.5.1. *Soient p et q comme dans la Proposition 1.4.1. Si $\mathbf{U}_n$ désigne le processus empirique uniforme, on a, sous l'hypothèse nulle, la convergence en loi*

$$\lim_{n\to\infty}\int_T q(t)\mathbf{U}_n^2\{p(t)\}d\mu(t) = \int_T q(t)\mathbf{B}^2\{p(t)\}d\mu(t). \tag{1.5.64}$$

Si de plus il existe un réel $\eta \in [1,2)$ tel que

$$\begin{aligned} \int_a^b \Big\{\int_a^x p(t)q(t)d\mu(t)\Big\}^\eta p'(x)\,dx &< \infty, & (1.5.65)\\ \int_a^b \Big\{\int_x^b \{1-p(t)\}q(t)d\mu(t)\Big\}^\eta p'(x)\,dx &< \infty, & (1.5.66)\end{aligned}$$

alors il existe une constante $C(p,q,\mu,\eta)$ telle que pour tout $x>0$, $n\geq 1$ on ait

$$\begin{aligned}\Delta_n(p,q,\mu) := \Big| P\Big(\int_T q(t)\,\mathbf{B}^2\{p(t)\}\,d\mu(t)\leq x\Big) - P\Big(\int_T q(t)\,\mathbf{U}_n^2\{p(t)\}\,d\mu(t)\leq x\Big)\Big|&\\ \leq C(p,q,\mu,\eta)n^{1-\eta}.& \quad (1.5.67)\end{aligned}$$

De plus,

$$\Delta_n(p,q,\mu) = o\left(n^{1-\eta}\right). \tag{1.5.68}$$

Démonstration. On sait que pour $p\equiv 1$, les relations (1.5.64) et (1.4.52) sont équivalentes (voir par exemple [**?**], Théorème 3.3 p. 325). Le cas général s'y ramène par le changement de variable $u = p(t)$.
Remarquons ensuite qu'on peut écrire, en notant m la densité de μ, et donc $d\mu(t) = m(t)dt$,

$$\begin{aligned} P\Big(\int_T q(t)\,\mathbf{B}^2\{p(t)\}\,\mu(t)dt\leq x\Big) &= P\Big(\int_0^1 Q(u)\,\mathbf{B}^2(u)du\leq x\Big), & (1.5.69)\\ P\Big(\int_T q(t)\,\mathbf{U}_n^2\{p(t)\}\,\mu(t)dt\leq x\Big) &= P\Big(\int_0^1 Q(u)\,\mathbf{U}_n^2(u)du\leq x\Big), & (1.5.70)\end{aligned}$$

où Q est la fonction définie sur $[0,1]$ en posant

$$a' := p(a)\,,\; b' := p(b)\,,\; Q(u) := \begin{cases} 0 & \text{si } u\notin(a',b'),\\ (\frac{qm}{p'})\circ p^{-1}(u) & \text{si } u\in(a',b').\end{cases}$$

D'après [?], Théorème 1.4 p. 89, (1.5.67) et (1.5.68) seront établis dès qu'on aura prouvé les trois inégalités

$$\int_0^1 Q(u)u(1-u)du \quad < \quad \infty, \tag{1.5.71}$$

$$\int_0^1 \{ \int_0^x uQ(u)du\}^\eta dx \quad < \quad \infty, \tag{1.5.72}$$

$$\int_0^1 \{ \int_x^1 (1-u)Q(u)du\}^\eta dx \quad < \quad \infty. \tag{1.5.73}$$

On a tout d'abord

$$\int_T q(t)p(t)\{1-p(t)\}m(t)dt = \int_{a'}^{b'} u(1-u)\{(\frac{qm}{p'})\circ p^{-1}\}(u)du = \int_0^1 u(1-u)Q(u)du$$

donc (1.5.71) découle de (1.4.52). Ensuite, on a

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \{ \int_0^x uQ(u)du\}^\eta dx &= \int_{a'}^1 \{ \int_{a'}^x uQ(u)du\}^\eta dx \\
&= \int_{a'}^{b'} \{ \int_{a'}^x uQ(u)du\}^\eta dx + (1-b')\{ \int_{a'}^{b'} uQ(u)du\}^\eta \\
&= \int_{a'}^{b'} \{ \int_a^{p^{-1}(x)} p(t)q(t)m(t)dt\}^\eta dx + (1-b')\{ \int_a^b p(t)q(t)m(t)dt\}^\eta \\
&= \int_a^b \{ \int_a^y p(t)q(t)d\mu(t)\}^\eta p'(y)dy + (1-b')\{ \int_a^b p(t)q(t)d\mu(t)\}^\eta.
\end{aligned}$$

Si $b'=1$, le terme de droite dans la somme ci-dessus disparait. Sinon, on a la majoration

$$\int_a^b q(t)p(t)d\mu(t) \le \frac{1}{1-p(b)} \int_a^b q(t)p(t)\{1-p(t)\}d\mu(t) < \infty$$

par (1.5.67) et donc l'hypothèse (1.5.65) implique (1.5.72). On montre de même que (1.5.66) implique (1.5.73). □

Exemple 1.5.1. Soit $T=(0,1)$, μ la mesure de Lebesgue et

$$\alpha > 0,\ p(t) = t^\alpha,\ q(t) = t^\beta. \tag{1.5.74}$$

Les conditions (1.4.52), (1.5.65) et (1.5.66) sont remplies dès que

$$\begin{cases} \int_0^1 t^\beta t^\alpha (1-t^\alpha)dt < \infty \\ \int_0^1 \{ \int_0^x t^\alpha t^\beta dt\}^\eta \alpha x^{\alpha-1} < \infty \\ \int_0^1 \{ \int_x^1 (1-t^\alpha) t^\beta dt\}^\eta \alpha x^{\alpha-1} < \infty \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} \alpha+\beta > -1 \\ (\alpha+\beta+1)\eta + \alpha - 1 > -1 \\ (\beta+1)\eta + \alpha - 1 > -1 \end{cases}$$

et ces relations sont satisfaites pour $\eta \ge 1$ dès que

$$\alpha + \beta + 1 > 0. \tag{1.5.75}$$

1.6 Une loi du logarithme itéré du type Chung-Mogulski

Proposition 1.6.1. *Soient p et q vérifiant toutes les hypothèses des Propositions* 1.4.1, 1.5.1 *et* $\mathbf{X}$ *le processus défini par* (1.4.53). *Supposons de plus que pour la suite* $\{\lambda_k : k \geq 1\}$ *des valeurs propres du D-K-L de* $\mathbf{X}$ *il existe des constantes c et d telles que*

$$c > 0\,,\ d \in \mathbb{R}\,,\ \sum_{k=1}^{\infty} |\, c\lambda_k\,(k+d)^2 - 1| < \infty. \tag{1.6.76}$$

Alors sous l'hypothèse nulle on a presque sûrement

$$\liminf_{n\to\infty}\,(\log_2 n) \int_T q(t)\,\mathbf{U}_n^2\big\{p(t)\big\}\,d\mu(t) = \frac{\pi^2}{8c}. \tag{1.6.77}$$

Démonstration. Soit $k_0 := \min\{k \in \mathbb{N}^*,\ k+d > 0\}$. On a donc $k_0 - 1 + d > -1$. Or l'hypothèse (1.6.76) implique

$$\sum_{k=k_0}^{\infty} |\, c\lambda_k\,(k+d)^2 - 1| < \infty.$$

On a donc d'après [?], Théorème 2 p. 3, lorsque $x \to 0$,

$$P\big(\sum_{k=k_0}^{\infty} \lambda_k \xi_k^2 < x^2\big) \prod_{k=k_0}^{\infty} \{c\lambda_k (k+d)^2\} \sim P\big(\sum_{k=k_0}^{\infty} \frac{\xi_k^2}{c(k+d)^2} < x^2\big).$$

En prenant les logarithmes dans l'équivalence ci-dessus et en utilisant [?] Corollaire 4 p. 12 et formule (3.4) p. 14 (ce qui est légitime car $k_0+d-1 > -1$), il vient successivement

$$\begin{aligned}
\log P\big(\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \xi_k^2 < x^2\big) &\sim \log P\big(\sum_{k=k_0}^{\infty} \lambda_k \xi_k^2 < x^2\big) && (1.6.78)\\
&\sim \log P\big(\sum_{k=k_0}^{\infty} \frac{\xi_k^2}{c(k+d)^2} < x^2\big) && (1.6.79)\\
&\sim \log P\big(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\xi_{k_0+k}^2}{c(k+k_0+d-1)^2} < x^2\big) && (1.6.80)\\
&\sim -\frac{\pi^2}{8cx^2} && (1.6.81)
\end{aligned}$$

qu'on peut écrire

$$\log P\big(||\mathbf{X}||_2 < x\big) \sim -\frac{\pi^2}{8cx^2} =: -\Lambda(x). \tag{1.6.82}$$

La réciproque de la fonction Λ est

$$\Lambda^*(x) = \frac{\pi}{\sqrt{8cx}}. \tag{1.6.83}$$

On peut alors utiliser [?], Théorème 1, dont les hypothèses (2.1) – (2.4) p. 400-401 sont vérifiées vu les relations (1.5.64), (1.5.67), (1.6.82) et (1.3.41) respectivement. On obtient

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{||X_n||_2}{\Lambda^*(\log_2 n)} = 1$$

qui après élévation au carré donne (1.6.77). □

Corollaire 1.6.1. *Soit* $\alpha > 0$ *et* $\beta > -\alpha - 1$. *On a presque sûrement sous l'hypothèse nulle*

$$\liminf_{n\to\infty} (\log_2 n) \int_0^1 t^\beta \, \mathbf{U}_n^2(t^\alpha)\, dt = \frac{\alpha}{2(\alpha+\beta+1)^2} \tag{1.6.84}$$

Démonstration. On prend $T = (0,1)$ muni de la mesure de Lebesgue, et on peut utiliser l'Exemple 1.5.1 puisque (1.5.74) et (1.5.75) sont satisfaites. Pour le processus $t^{\beta/2}\mathbf{B}(t^\alpha)$ on a (voir [?], (1.28)) : $\lambda_k = (4\nu^2)/(\alpha z_{\nu,k}^2)$ avec $\nu = \alpha/(\alpha+\beta+1)$ et où $z_{\nu,k}$ le k-ième zéro de la fonction de Bessel J_ν. Or (voir [?] formule 9.5.12),

$$\begin{aligned} z_{\nu,k} = (k + \frac{\nu}{2} - \frac{1}{4})\pi + O(\frac{1}{k}) &\Rightarrow \frac{(k+\frac{\nu}{2}-\frac{1}{4})\pi}{z_{\nu,k}} = 1 + O(\frac{1}{k^2}) \\ &\Rightarrow \{\frac{(k+\frac{\nu}{2}-\frac{1}{4})\pi}{z_{\nu,k}}\}^2 = 1 + O(\frac{1}{k^2}) \Rightarrow \sum_{k=1}^\infty \Big|\frac{\alpha\pi^2}{4\nu^2}(k+\frac{\nu}{2}-\frac{1}{4})^2\lambda_k - 1\Big| < \infty. \end{aligned} \tag{1.6.85}$$

Donc (1.6.76) est satisfait pour $c = (\alpha\pi^2)/(4\nu^2) = \pi^2(\alpha+\beta+1)^2/(4\alpha)$ et $d = \nu/2 - 1/4$. On obtient alors

$$\frac{\pi^2}{8c} = \frac{\pi^2 \cdot 4\alpha}{8\cdot\pi^2(\alpha+\beta+1)^2} = \frac{\alpha}{2(\alpha+\beta+1)^2}$$

dont découle (1.6.84). □

Chapitre 2

Quelques résultats dans des Espaces de Riemann

2.1 Laplacien, aire et volume des boules dans des espaces de Riemann

2.1.1 Cas général

Nous rappelons sans entrer dans les détails quelques faits et notations concernant les variétés riemanniennes. On trouve ces résultats dans de multiples ouvrages consacrés à ce sujet. Nous avons pour notre part surtout utilisé [?], [?] et [?].

Soit M une variété C^∞ de dimension n, connexe, munie d'une métrique définie positive g_{ij} qui lui donne une structure d'espace de Riemann. On note T_x l'espace tangent en x, d la distance sur M induite par g et $\delta_M := \sup\{d(x,y) : x, y \in M\}$ son diamètre, éventuellement infini.

Si $x_0 \in M$, il existe un système de coordonnées polaires géodésiques d'origine x_0. En notant pour tout $x \in M$, $r := d(x, x_0)$ et en choisissant sur la sphère unité centrée en x_0 des coordonnées locales (θ^i), $1 \leq i \leq n-1$, le ds^2 de l'espace prend la forme (avec les notations du calcul tensoriel)

$$ds^2 = dr^2 + g_{ij}(r, \theta^k) d\theta^i d\theta^j$$

et le laplacien s'écrit

$$\Delta U = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\partial}{\partial r}\big(\sqrt{|g|}\frac{\partial U}{\partial r}\big) + \frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\partial}{\partial \theta^i}\big(\sqrt{|g|} g^{ij} \frac{\partial U}{\partial \theta^j}\big), \text{ avec } g = \det(g_{ij}) \tag{2.1.1}$$

(voir [?] p. 13-14 pour ces propriétés). Pour $x \in M$, notons $A_x(r)$ et $V_x(r)$ l'aire et le volume de la boule géodésique fermée $B_x(r)$ de centre x et de rayon r. Soient ∇ la dérivation covariante associée à la connexion de Levi-Civita, R le tenseur de courbure de (M, g) et

$$\tau(R) = \sum_{i=1}^{n} R_{ii}, \qquad ||R||^2 = \sum_{i,j,k,l=1}^{n} R_{ijkl}^2,$$

$$||\rho(R)||^2 = \sum_{i,j=1}^{n} R_{ij}^2, \quad \Delta R = \text{ laplacien de } R = \sum_{i=1}^{n} \nabla_{ii} \tau(R).$$

Le résultat suivant est démontré dans [?]. Voir aussi [?] p.82.

Proposition 2.1.1. *Avec les notations ci-dessus on a, lorsque $r \to 0$,*

$$A_x(r) = \frac{2\pi^{n/2} r^{n-1}}{\Gamma(\frac{n}{2})} \Big\{1 - \frac{\tau(R)}{6n} r^2 + \frac{-3||R||^2 + 8||\rho(R)||^2 + 5\tau(R)^2 - 18\Delta R}{360n(n+2)} r^4 + O(r^6)\Big\}_x \tag{2.1.2}$$

et

$$V_x(r) = \frac{2\pi^{n/2} r^{n}}{n\Gamma(\frac{n}{2})} \Big\{1 - \frac{\tau(R)}{6(n+2)} r^2 + \frac{-3||R||^2 + 8||\rho(R)||^2 + 5\tau(R)^2 - 18\Delta R}{360(n+2)(n+4)} r^4 + O(r^6)\Big\}_x . \tag{2.1.3}$$

On sait ([?], Théorème 3.4.4 p.68) qu'il existe R_0 tel que pour tout $r < R_0$, $B_x(r)$ soit difféomorphe à une boule de rayon r dans T_x. Donc pour $0 < r < R_0$, $A_x(r)$ est strictement positif. Fixons un tel R_0.

Proposition 2.1.2. *Soit $x \in M$ et $R_0 \in (0, \delta_M)$ comme ci-dessus. On a*

$$\forall n \geq 1 \ : \ \int_0^{R_0} \frac{V_x^2}{A_x}(\rho)\, d\rho < \infty \ \text{ et } \ \int_0^{R_0} \frac{V_x}{A_x}(\rho)\, d\rho < \infty. \tag{2.1.4}$$

Pour la fonction définie sur $(0, R_0)$ par

$$\varphi(r) = \int_r^{R_0} \frac{d\rho}{A_x(\rho)} \tag{2.1.5}$$

on a

$$\forall n \geq 1\,, \ \int_0^{R_0} \varphi(\rho) A_x(\rho)\, d\rho < \infty. \tag{2.1.6}$$

Démonstration. Pour toutes ces intégrales, le seul problème éventuel est en $r = 0$. Mais (2.1.4) est évident vu (2.1.2) et (2.1.3). Ensuite, on a au voisinage de 0 et pour $n \neq 2$ (resp. $n = 2$)

$$\begin{aligned} 1/A_x(r) = 0(r^{1-n}) \ &\Rightarrow \varphi(r) = 0(r^{2-n}) \ (\text{ resp. } 0(\log r)) \\ &\Rightarrow \varphi(r) A_x(r) = 0(r) \ (\text{ resp. } 0(r \log r)). \end{aligned} \tag{2.1.7}$$

ce qui permet d' obtenir (2.1.6). □

2.1.2 Espaces harmoniques, symétriques

Les espaces harmoniques ont été introduits par Copson et Ruse [?]. Des exposés contenant les définitions et propriétés de base de ces espaces se trouvent dans [?] (en particulier le chapitre 2), [?], [?] chapitre 6 et l'ouvrage plus récent [?], chapitre 6. Un espace est dit harmonique en x_0 s'il vérifie l'une des deux conditions équivalentes suivantes :

- il existe une fonction réelle U non constante, harmonique (i.e. $\Delta U = 0$), qui ne dépende de x que par l'intermédiaire de $r = d(x, x_0)$: $U(x) = \varphi(d(x, x_0)) = \varphi(r)$;
- il existe une fonction $\chi(r)$, appelée fonction caractéristique de l'espace telle que $\Delta r = \chi(r)$.

L'espace est dit globalement harmonique, ou harmonique, s'il est harmonique en tout point x_0. On montre alors que la fonction caractéristique χ ne dépend pas du point de base x_0 choisi. La fonction harmonique $\varphi(r)$ intervenant dans la définition n'est pas unique, mais on a toujours la relation

$$\chi(r) = -\frac{\varphi''}{\varphi'}(r). \tag{2.1.8}$$

Un espace M est dit symétrique ([?] p. 64) si c'est une variété riemanienne connexe telle que pour tout $x \in M$, il existe une isométrie $s_x : M \to M$ telle que $s_x(x) = x$, et que pour toute géodésique $\gamma : \mathbb{R} \to M$ vérifiant $\gamma(0) = x$ on ait $s_x(\gamma(t)) = \gamma(-t)$.

Proposition 2.1.3. *Dans un espace harmonique symétrique, la surface $A_x(r)$ et le volume $V_x(r)$ de la boule géodésique fermée de centre x et de rayon r ne dépendent pas de x, mais seulement de r :*

$$A_x(r) = A(r)\,, \quad V_x(r) = V(r). \tag{2.1.9}$$

De plus, le laplacien au point x s'écrit, en coordonnées polaires géodésiques d'origine x_0,

$$\Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{A'(r)}{A(r)}\frac{\partial U}{\partial r} + L_S\,U \tag{2.1.10}$$

où L_S est le laplacien sur la sphère de centre x_0 et de rayon r.
Si $U(r,\theta) = F(r)$ est une fonction qui ne dépend que de r, on a

$$\Delta F = \frac{1}{A}\big(AF'\big)' \tag{2.1.11}$$

où F' désigne la dérivée de F par rapport à r.

Démonstration. Un espace harmonique symétrique est plat (i.e.euclidien) ou c'est un espace symétrique de rang 1 ([?] Corollaire 6.3.2 p.256). Pour ces espaces, les résultats annoncés se trouvent dans [?], § 2.5.4 p.312-315, notamment la proposition 5.26 p. 313. □

Le tableau suivant donne les expressions explicites des fonctions A et V pour la liste complète des espaces harmoniques symétriques simplement connexes (cette liste est donnée dans [?] Tableau 6.2 p. 259). On retrouve, outre les espaces euclidiens, tous les espaces symétriques de rang 1 (voir leur liste dans [?] p. 167 et 177 ou [?] p. 78), excepté les espaces projectifs réels. Pour ces espaces, une difficulté surgit dans la définition de $A(r)$, qui peut présenter une discontinuité. Ainsi sur la sphère unité de l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ sur laquelle on a identifié les points antipodaux, A est discontinue en $r = \pi/2$. Voir à ce sujet la Remarque 3.1 p. 116 dans [?]. Au lieu d' espaces projectifs réels, nous considérerons des demi-sphères.

Les formules de la première ligne du tableau sont bien connues. Pour les autres, voir [?] p. 341. La constante κ désigne un réel. Elle représente la courbure de $\mathbb{S}^n_\kappa$ et $\mathbb{H}^n_\kappa$, le 1/4 de la courbure sectionnelle holomorphe pour $\mathbb{CP}^n_\kappa$ et $\mathbb{CH}^n_\kappa$, le 1/4 de la courbure sectionnelle maximum pour $\mathbb{QP}^n_\kappa$, $\mathbb{QH}^n_\kappa$, $\mathrm{Cay}\mathbb{P}^2_\kappa$ et $\mathrm{Cay}\mathbb{H}^2_\kappa$. Les fonctions S_κ et C_κ, introduites pour l'étude du laplacien par Chavel (voir [?] p. 72 ou [?] p. 39) sont définies par les relations

$$S_\kappa(r) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-\kappa)^j r^{2j+1}}{(2j+1)!} = \begin{cases} (1/\sqrt{\kappa})\sin(\sqrt{\kappa}\,r), & \text{si } \kappa > 0, \\ r, & \text{si } \kappa = 0, \\ (1/\sqrt{-\kappa})\sinh(\sqrt{-\kappa}\,r), & \text{si } \kappa < 0, \end{cases} \tag{2.1.12}$$

et

$$C_\kappa(r) = S'_\kappa(r) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-\kappa)^j r^{2j}}{(2j)!} \begin{cases} \cos(\sqrt{\kappa}\,r), & \text{si } \kappa > 0, \\ 1, & \text{si } \kappa = 0, \\ \cosh(\sqrt{-\kappa}\,r), & \text{si } \kappa < 0. \end{cases} \tag{2.1.13}$$

On notera

$$\delta_\kappa := \begin{cases} \frac{\pi}{\sqrt{\kappa}} & \text{si } \kappa > 0, \\ \infty & \text{si } \kappa \leq 0. \end{cases} \tag{2.1.14}$$

Remarquons au passage

$$\kappa > 0 \ \Rightarrow S_\kappa(\delta_\kappa - r) = S_\kappa(r), \text{ et } C_\kappa(\delta_\kappa - r) = -C_\kappa(r). \tag{2.1.15}$$

H - dim$_{\mathbb{R}}$ H	**V(H)** pour $\kappa \geq 0$	**A(r)**	**V(r)**	δ_H
Espace euclidien $\mathbb{R}^n$ $(\kappa = 0)$ $-$ n	∞	$\frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2})} r^{n-1}$	$\frac{2\pi^{n/2}}{n\Gamma(\frac{n}{2})} r^n$	∞
Espace de courbure constante : sphère $\mathbb{S}^n_\kappa$ $(\kappa > 0)$ ou pseudo-sphère $\mathbb{H}^n_\kappa$ $(\kappa < 0)$ $-n$	$\int_0^{\delta_\kappa} 2\frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2})} S_\kappa^{n-1}(\rho)d\rho$	$2\frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2})} S_\kappa^{n-1}(r)$	$\int_0^r 2\frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2})} S_\kappa^{n-1}(\rho)d\rho$	δ_κ
Plan projectif complexe $\mathbb{CP}^n_\kappa$ $(\kappa > 0)$ ou $\mathbb{CH}^n_\kappa$ $(\kappa < 0)$ $-2n$	$(\frac{\pi}{\sqrt{\kappa}})^n/n!$	$\frac{2\pi^n}{(n-1)!} S_\kappa^{2n-1}(r) C_\kappa(r)$	$\frac{\pi^n}{n!} S_\kappa^n(r)$	$\frac{\delta_\kappa}{2}$
Espace projectif des quaternions $\mathbb{QP}^n_\kappa$ $(\kappa > 0)$ ou $\mathbb{QH}^n_\kappa$ $(\kappa < 0)$ $-4n$	$(\frac{\pi}{\kappa})^{2n}/(2n+1)!$	$\frac{\pi^{2n}}{4(2n-1)!} S_\kappa^3(2r)\, S_\kappa^{4n-4}(r)$	$\frac{\pi^{2n}}{(2n+1)!} S_\kappa^{4n}(r)\{1 + 2nC_\kappa^2(r)\}$	$\frac{\delta_\kappa}{2}$
Plan de Cayley Cay$\mathbb{P}^2_\kappa$ $(\kappa > 0)$ ou Cay$\mathbb{H}^n_\kappa$ $(\kappa < 0)$ -16	$6(\frac{\pi}{\kappa})^8/11!$	$\frac{\pi^8}{7!2^6} S_\kappa^7(2r) S_\kappa^8(r)$	$\frac{6\pi^8}{11!} S_\kappa^{16}(r)\{120C_\kappa^6(r) + 36C_\kappa^4(r) + 8C_\kappa^2(r) + 1\}$	$\frac{\delta_\kappa}{2}$

Dans toute la suite, par H espace harmonique symétrique de dimension n, nous entendrons un des espaces du tableau ci-dessus, de dimension n sur $\mathbb{R}$.

Pour $n = 1$, $A(r) = 2$ est une constante, c'est le nombre de points sur la boule de rayon r. Remarquons que pour $n \geq 2$ la fonction A s'annule en $r = 0$ et en $r = \delta_H$ pour H compact. Elle est strictement positive sur $(0, \delta_H)$. Un rapide examen du tableau montre que la définition suivante est légitime.

Definition 2.1.1. *Si H est un espace harmonique symétrique compact du tableau ci-dessus, on note n_H l'entier positif et α_H le réel strictement positif tels qu'au voisinage de δ_H on ait*

$$A(\delta_H - r) \sim \alpha_H(\delta_H - r)^{n_H} \text{ et } V(\delta_H) - V(\delta_H - r) \sim \frac{\alpha_H}{n_H + 1}(\delta_H - r)^{n_H+1}. \tag{2.1.16}$$

Comme conséquence immédiate de ce tableau, on a également la proposition suivante, qui nous servira ultérieurement à démontrer des convergences du type (1.3.32) p. 36 pour certaines fonctions de covariance.

Proposition 2.1.4. *Soit H un espace harmonique symétrique de dimension n. Soient R_1 et R_2 deux réels finis vérifiant $0 \leq R_1 < R_2 \leq \delta_H$. Les trois intégrales suivantes sont finies :*

$$\int_{R_1}^{R_2} \frac{V(\rho) - V(R_1)}{A(\rho)} \, d\rho \ \textit{pour } n = 1 \ \textit{ou } R_2 < \delta_H,$$

$$\int_{R_1}^{R_2} \frac{V(R_2) - V(\rho)}{A(\rho)} \, d\rho \ \textit{pour } n = 1 \ \textit{ou } R_1 > 0$$

$$\textit{et } \int_{R_1}^{R_2} \frac{[V(\rho) - V(R_1)] \cdot [V(R_2) - V(\rho)]}{A(\rho)} \, d\rho. \quad (2.1.17)$$

Si $n = 1$ ou $R_1 > 0$ (resp. $n = 1$ ou $R_2 < \delta_H$), la fonction

$$\varphi_1(r) = \int_{R_1}^{r} \frac{d\rho}{A(\rho)} \qquad (\textit{resp. } \varphi_2(r) = \int_{r}^{R_2} \frac{d\rho}{A(\rho)}) \quad (2.1.18)$$

est bien définie pour tout $r \in (R_1, R_2)$ et on a

$$\forall n \geq 1 \, , \ \int_{R_1}^{R_2} \varphi_i(\rho) A(\rho) \, d\rho < \infty \, , \ i = 1, 2. \quad (2.1.19)$$

Démonstration. Toutes les convergences sont triviales pour $n = 1$ car A ne s'annule pas. Les convergences en 0 des première et troisième intégrales de (2.1.17) ont été démontrées dans la proposition 2.1.2 . Si $R_2 < \delta_H$, alors $A(R_2) > 0$, et il n'y a pas de problème de convergence en R_2 pour les deuxième et troisième intégrales. Pour le cas où $\delta_H < \infty$ et $R_2 = \delta_H$, la convergence en $R_2 = \delta_H$ dans ces deux intégrales s'obtient grâce aux équivalents (2.1.16) qui pour $\rho \to \delta_H$ nous donnent

$$\frac{V(\delta_H) - V(\rho)}{A(\rho)} \sim \frac{\delta_H - \rho}{n_H + 1}.$$

Dans (2.1.18) l'existence des fonctions est assurée car A ne s'annule pas sur (R_1, R_2). Pour (2.1.19) les seuls problèmes éventuels sont lorsque $\kappa > 0$ pour la convergence de

$$\int_0^{R_2} \varphi_2(r) A(r) dr \text{ en } 0 \text{ si } R_1 = 0 \text{ et } \int_{R_1}^{\delta_H} \varphi_1(r) A(\rho) dr \text{ en } \delta_H \text{ si } R_2 = \delta_H.$$

Mais le cas de la première de ces intégrales a été réglé dans la proposition 2.1.2, relation (2.1.6). Pour la seconde, on peut supposer que R_1 est assez grand pour que la fonction A soit décroissante sur $[R_1, \delta_H]$. On a dans ce cas

$$\int_{R_1}^{\delta_H} \varphi_1(r) A(r) dr = \int_{R_1}^{\delta_H} \{ \int_{R_1}^{r} \frac{d\rho}{A(\rho)} \} A(r) \, dr = \int_{R_1}^{\delta_H} \{ \int_{R_1}^{r} \frac{A(r) d\rho}{A(\rho)} \} \, dr$$
$$\leq \int_{R_1}^{\delta_H} \{ \int_{R_1}^{r} d\rho \} \, dr < \infty.$$

2.2 Une covariance triangulaire liée à un opérateur invariant

Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer un de nos résultats centraux. Le théorème suivant montre comment construire des processus gaussiens à partir de H, pour lesquels les fonctions propres du D-K-L sont solutions d'une équation différentielle faisant intervenir le laplacien.

2.2.1 Cas général

Rappelons que si f et g sont deux fonctions dérivables de la variable x, leur wronskien est la fonction définie par

$$W_x\{f,g\} = fg' - f'g.$$

Théorème 2.2.1. *Soit H un espace harmonique symétrique de diamètre δ_H et $T = (r_1, r_2) \subseteq (0, \delta_H)$ un intervalle borné. Si L, K_1 et K_2 sont trois fonctions définies sur H, ne dépendant que de r, telles que $K_1, K_2 > 0$ et*

$$\begin{cases} \Delta K_i + LK_i = 0 \quad \textit{sur} \quad (r_1, r_2) \quad \textit{pour } i = 1, 2, \\ \int_{r_1}^{r_2} K_1(r)K_2(r)A(r)dr < \infty, \\ W_r\{K_1, K_2\}(r) < 0 \quad \textit{pour tout } r \in (r_1, r_2), \end{cases} \tag{2.2.20}$$

alors il existe une constante $w > 0$ telle que

$$\forall r \in (r_1, r_2)\,, \quad W_r(K_1, K_2) = -\frac{w}{A(r)}, \tag{2.2.21}$$

et la fonction

$$K(u, r) = K_1(u)K_2(r), \quad r_1 < u \leq r < r_2 \tag{2.2.22}$$

est une fonction de covariance triangulaire vérifiant les hypothèses H1 et H2 du Théorème 1.3.1, pour $T = (r_1, r_2)$ et la mesure μ de densité $A(r)$ par rapport à la mesure de Lebesgue.
L'opérateur $\mathcal{K}$ de noyau K défini pour tout $f \in L^2(T, A)$ par

$$\mathcal{K}f(r) = \int_{r_1}^{r_2} K(\rho, r)f(\rho)A(\rho)d\rho \tag{2.2.23}$$

vérifie

$$\{\Delta + L\} \circ \mathcal{K}(f) = -wf. \tag{2.2.24}$$

Si de plus les deux limites

$$\lim_{r \to r_i} \{AW_r(K_i, f)\}(r), \quad i = 1, 2, \tag{2.2.25}$$

existent et sont finies, alors pour tout $f \in L^2(T, A)$

$$\mathcal{K} \circ \{\Delta + L\}\,(f) = -w\,f + K_1(r)\{AW(K_2, f)\}(r_2) - K_2(r)\{AW(K_1, f)\}(r_1). \tag{2.2.26}$$

Démonstration. Commençons par démontrer (2.2.21). On a par hypothèse sur K_1 et K_2, et en utilisant l'expression (2.1.10) p. 48 obtenue pour le laplacien,

$$(AK_2')' = -LAK_2 \text{ et } (AK_1')' = -LAK_1.$$

Multiplions par K_1 les deux membres de la première de ces égalités, par K_2 les deux membres de la seconde, et soustrayons membre à membre. Il vient

$$K_1(AK_2')' - K_2(AK_1')' = 0$$

soit

$$A(K_1K_2'' - K_1''K_2) + A'(K_1K_2' - K_1'K_2) = 0$$

et donc $\{AW_r(K_1, K_2)\}' = 0$. La relation (2.2.21) en découle, avec $w > 0$ car $A > 0$ et $W_r(K_1, K_2) < 0$. Donc K est bien une fonction de covariance triangulaire car la relation (1.4.46) suivant la définition 1.4.1 p. 39 est satisfaite. La vérification de (1.3.31) et (1.3.32) est immédiate vu les relations (2.2.20) qui impliquent en particulier que K est de classe C^∞ sur T.
Posons ensuite $\mathcal{K}f = F$. En dérivant par rapport à r la relation

$$F(r) = K_2(r)\int_{r_1}^{r} K_1(u)f(u)A(u)du + K_1(r)\int_{r}^{r_2} K_2(u)f(u)A(u)du\,,\ r_1 < r < r_2,$$

on obtient (en remarquant que les deux termes obtenus en dérivant les intégrales sont opposés, et donc disparaissent dans la somme)

$$F'(r) = K_2'(r)\int_{r_1}^{r} K_1(u)f(u)A(u)du + K_1'(r)\int_{r}^{r_2} K_2(u)f(u)A(u)du.$$

Multiplions les deux membres de cette égalité par $A(r)$ puis dérivons à nouveau par rapport à r, il vient

$$\begin{aligned}(AF')'(r) \quad &= \quad (AK_2')'(r)\int_{r_1}^{r} K_1(u)f(u)A(u)du + (AK_1')'(r)\int_{r}^{r_2} K_2(u)f(u)A(u)du\\ &\quad\ + \{A^2W_r(K_1, K_2)\}(r).\end{aligned}$$

En divisant les deux membres de cette égalité par $A(r)$ et en tenant compte de (2.1.11), (2.2.20) et (2.2.21) on obtient successivement

$$\begin{aligned}\Delta F(r) \quad &= \quad \Delta K_2(r)\int_{r_1}^{r} K_1(u)f(u)A(u)du + \Delta K_1(r)\int_{r}^{r_2} K_2(u)f(u)A(u)du - wf(r)\\ &= \quad -L(r)\big\{K_2(r)\int_{r_1}^{r} K_1(u)f(u)A(u)du + K_1(r)\int_{r}^{r_2} K_2(u)f(u)A(u)du\big\} - wf(r)\\ &= \quad -L(r)F(r) - wf(r)\end{aligned}$$

et donc (2.2.24) est vérifié. Afin de prouver (2.2.26), posons $g=(\Delta+L)f=A^{-1}(Af')'+Lf$. Fixons $(r_1',r_2')\subset(r_1,r_2)$ et $r\in(r_1',r_2')$.
On a d'une part, en tenant compte de $(AK_1')'=-LAK_1$,

$$\begin{aligned}\int_{r_1'}^{r} g(u)K_1(u)A(u)du &= \int_{r_1'}^{r}\big\{\frac{1}{A}(Af')'+Lf\big\}K_1A(u)du\\ &= \int_{r_1'}^{r}\big\{(Af')'K_1-(AK_1')'f\big\}(u)du\\ &= \big[Af'K_1-AK_1'f\big]_{r_1'}^{r}-\int_{r_1'}^{r}\big\{Af'K_1'-AK_1'f'\big\}(u)du\\ &= \big[AW_r(K_1,f)\big]_{r_1'}^{r}.\end{aligned}$$

D'autre part, en tenant compte de $(AK_2')'=-LAK_2$, il vient de même

$$\begin{aligned}\int_{r}^{r_2'} g(u)K_2(u)A(u)du &= \int_{r}^{r_2'}\big\{\frac{1}{A}(Af')'+Lf\big\}K_2A(u)du\\ &= \int_{r}^{r_2'}\big\{(Af')'K_2-(AK_2')'f\big\}(u)du\\ &= \big[Af'K_2-AK_2'f\big]_{r}^{r_2'}-\int_{r}^{r_2'}\big\{Af'K_2'-AK_2'f'\big\}(u)du\\ &= \big[AW_r(K_2,f)\big]_{r}^{r_2'}.\end{aligned}$$

La combinaison de ces deux résultats donne

$$\begin{aligned}&\int_{r_1'}^{r_2'} K(u,r)g(u)A(u)du = K_2(r)\int_{r_1'}^{r} g(u)K_1(u)A(u)du + K_1(r)\int_{r}^{r_2'} g(u)K_2(u)A(u)du\\ &= K_2(r)\big[AW_r(K_1,f)\big]_{r_1'}^{r}+K_1(r)\big[AW_r(K_2,f)\big]_{r}^{r_2'}\\ &= \big\{K_2AW_r(K_1,f)-K_1AW_r(K_2,f)\big\}(r)+K_1(r)\big\{AW_r(K_2,f)\big\}(r_2')-K_2(r)\big\{AW_r(K_2,f)\big\}(r_1').\end{aligned}$$

Mais quelles que soient les fonctions h,h_1 et h_2, on a

$$\begin{aligned}h_2W_r(h_1,h)-h_1W_r(h_2,h) &= h_2(h_1h'-h_1'h)-h_1(h_2h'-h_2'h)\\ &= h(h_1h_2'-h_1'h_2)\\ &= hW_r(h_1,h_2).\end{aligned}$$

Donc sous l'hypothèse (2.2.25), on obtient en faisant tendre r_i' vers r_i pour $i=1,2$,

$$\begin{aligned}\mathcal{K}g(r) &= \big\{fAW_r(K_1,K_2)\big\}(r)+K_1(r)\big\{AW_r(K_2,f)\big\}(r_2)-K_2(r)\big\{AW_r(K_1,f)\big\}(r_1)\\ &= -wf(r)+K_1(r)\big\{AW_r(K_2,f)\big\}(r_2)-K_2(r)\big\{AW_r(K_1,f)\big\}(r_1)\end{aligned}$$

et (2.2.26) est bien vérifié. □

Proposition 2.2.1. *Avec les hypothèses et notations du Théorème* 2.2.1*, on a*

$$\mathcal{K}f = \lambda f \textit{ pour } (f,\lambda) \in L^2\big(T,A\big) \times [0,\infty)$$

si et seulement si $\lambda > 0$ *et* f *est solution de l'équation différentielle*

$$\Delta f + (L + \frac{w}{\lambda})f = 0 \textit{ sur } (r_1, r_2) \tag{2.2.27}$$

avec les conditions aux limites

$$\lim_{r \to r_j} \big\{AW_r(K_j, f)\big\}(r) = 0 \quad \textit{pour } j = 1, 2. \tag{2.2.28}$$

Démonstration. On voit tout d'abord grâce à (2.2.24) que $\lambda = 0$ ne peut-être valeur propre de $\mathcal{K}$ car la fonction propre correspondante serait nulle. La proposition est alors une conséquence directe des relations (2.2.24) – (2.2.26). □

2.2.2 Quelques conditions aux limites particulières

Dans certains cas, les conditions aux limites (2.2.28) peuvent s'écrire sous une forme plus commode.

Proposition 2.2.2. *Avec les hypothèses et les notations du Théorème* 2.2.1 *et de la Proposition* 2.2.1*, supposons en outre que pour* $j = 1$ *ou* 2

$$\lim_{r \to r_j} A(r)K(r,r) = 0. \tag{2.2.29}$$

Si f *est fonction propre de* $\mathcal{K}$ *associée à la valeur propre* λ*, alors*

$$f \textit{ est solution de } (2.2.27) \textit{ et } \lim_{r_j} \sqrt{A} f = 0. \tag{2.2.30}$$

Réciproquement si f *satisfait* (2.2.30)*, et de plus* $\sqrt{A}f$ *et* $\sqrt{A}K_j$ *sont prolongeables en* r_j *en des fonctions* C^1*, alors* f *vérifie la condition limite* (2.2.28) *en* r_j*.*

Démonstration. Si f est fonction propre de $\mathcal{K}$ associée à la valeur propre λ, alors on sait d'après la proposition précédente que f est solution de (2.2.27). De plus pour tout $r \in (r_1, r_2)$

$$|\lambda f(r)| = |\int_{r_1}^{r_2} K(u,r) f(u) A(u) du| \leq \sqrt{K(r,r)} \int_{r_1}^{r_2} \sqrt{K(u,u)} |f(u)| A(u) du.$$

L'intégrale du membre de droite est finie puisque $u \mapsto \sqrt{K(u,u)}$ et f sont dans $L^2\big((r_1, r_2), A\big)$. En multipliant les deux membres de l'inégalité par $\sqrt{A(r)}$ et en faisant tendre r vers r_1, l'hypothèse (2.2.29) conduit bien à $\lim_{r_j} \sqrt{A} f = 0$. Pour la réciproque, montrons tout d'abord que $\lim_{r_j} \sqrt{A} K_j = 0$. Fixons $R \in (r_1, r_2)$. Dans le cas $j = 1$ prenons $r \in (r_1, R)$. Il vient $K_1(r)K_2(R) = K(r, R) \leq \sqrt{K(r,r)K(R,R)}$ d'où

$$\sqrt{A(r)}K_1(r) \leq \frac{\sqrt{A(r)K(r,r)K(R,R)}}{K_2(R)}$$

et en faisant tendre r vers r_1 on obtient $\lim_{r_1} \sqrt{A}K_1 = 0$. Pour obtenir l'inégalité dans le cas $j = 2$ on prend $r \in (R, r_2)$ et on utilise $K_1(R)K_2(r) = K(R, r) \leq \sqrt{K(r,r)K(R,R)}$ qui donne

$$\sqrt{A(r)}K_2(r) \leq \frac{\sqrt{A(r)K(r,r)K(R,R)}}{K_1(R)}$$

pour aboutir à $\lim_{r_2} \sqrt{A}K_2 = 0$. Pour démontrer que la condition (2.2.28) est bien satisfaite en r_j, il suffit de remarquer que

$$\begin{aligned}
&AW_r(K_j, f) = A(K_j f' - K_j' f) \\
&= \sqrt{A}K_j\big(\sqrt{A}f' + \tfrac{fA'}{2\sqrt{A}}\big) - \sqrt{A}f\big(\sqrt{A}K_j' + \tfrac{K_jA'}{2\sqrt{A}}\big) \\
&= \sqrt{A}K_j\big(\sqrt{A}f\big)' - \sqrt{A}f\big(\sqrt{A}K_j\big)',
\end{aligned}$$

et que les deux termes de cette somme tendent vers 0 lorsque r tend vers r_j. On obtient bien la condition annoncée. □

Un résultat du même type est donné dans la proposition suivante.

Proposition 2.2.3. *Avec les hypothèses et les notations du Théorème* 2.2.1 *et de la Proposition* 2.2.1 *on a :*

Si K_1 est une fonction constante,

$$\lim_{r\to r_1} \big\{AW_r(K_1, f)\big\}(r) = 0 \quad \iff \quad \lim_{r\to r_1} r^{n-1}f'(r) = 0; \tag{2.2.31}$$

Si K_2 est une fonction constante,

$$\lim_{r\to r_2} \big\{AW_r(K_2, f)\big\}(r) = 0 \quad \iff \quad \lim_{r\to r_2} \big[(r_2 - r)^{n_H - 1}\, 1_{\{r_2=\delta_H\}} + 1_{\{r_2<\delta_H\}}\big]\, f'(r) = 0. \tag{2.2.32}$$

Démonstration. Si $r_1 > 0$ on a $A(r_1) > 0$ et

$$\lim_{r\to r_1} \big\{AW_r(K_1, f)\big\}(r) = 0 \iff \lim_{r\to r_1} f'(r) = 0.$$

Si $r_1 = 0$, en tenant compte de (2.1.2) il vient

$$\lim_{r\to r_1} \big\{AW_r(K_1, f)\big\}(r) = 0 \iff \lim_{r\to r_1} A(r)f'(r) = 0 \iff \lim_{r\to 0} r^{n-1}f'(r) = 0.$$

Dans tous les cas on a bien (2.2.31).

En r_2, si $\delta_H = \infty$, on a $A(r_2) > 0$ et le calcul est analogue au cas $r_1 > 0$. Si $\delta_H < \infty$, on a encore des calculs analogues à ceux faits pour r_1, en remplaçant n par n_H. □

2.2.3 Tableau récapitulatif

Le tableau qui suit résume les résultats précédents, en reprenant les hypothèses et notations du Théorème 2.2.1 et de la proposition 2.2.1. Tous les processus de la 1^{re} colonne ont la même fonction de covariance triangulaire

$$K(\rho, r) = K_1(\rho) K_2(r), \quad r_1 < \rho \le r < r_2.$$

Pour que le couple $(f, \lambda) \in L^2(T, A) \times (0, \infty)$ satisfasse

$$\mathcal{K} f = \lambda f,$$

on a vu qu'il est nécessaire et suffisant qu'il soit solution de l'équation différentielle

$$\Delta f + (L + \frac{w}{\lambda}) f = 0, \quad r_1 < r < r_2, \tag{2.2.33}$$

avec les conditions aux limites

$$C_1 : \lim_{r \to r_1} \{AW_r(K_1, f)\}(r) = 0, \tag{2.2.34}$$

$$C_2 : \lim_{r \to r_2} \{AW_r(K_2, f)\}(r) = 0. \tag{2.2.35}$$

La fonction f dans le tableau est solution de l'équation différentielle (2.2.33). Pour différentes hypothèses sur K_1 et K_2, on obtient des conditions sur f en r_1 ou r_2, nécessaires (CN), suffisantes (CS) ou nécessaires et suffisantes (CNS) pour que f vérifie les conditions C_1 et C_2 respectivement. Nous noterons D_1 et D_2 les deux conditions

$$D_1 : \text{ les fonctions } \sqrt{A}K_1 \text{ et } \sqrt{A}f \text{ sont } C^1 \text{ sur } [r_1, r_2); \tag{2.2.36}$$

$$D_2 : \text{ les fonctions } \sqrt{A}K_2 \text{ et } \sqrt{A}f \text{ sont } C^1 \text{ sur } (r_1, r_2]. \tag{2.2.37}$$

<table>
<tr><th colspan="2">Forme du processus</th><th>Conditions aux limites pour f</th></tr>
<tr><td rowspan="2">$\mathbf{W}(K_1)$</td><td rowspan="2">$K_1 \nearrow$</td><td>Si $\sqrt{A}K_1(r_1) = 0$ alors $\sqrt{A}f(r_1) = 0$ est (CN) et (CS sous D_1)</td></tr>
<tr><td>$\lim\limits_{r \to r_2} \left[(\delta_H - r)^{n_H - 1} 1_{\{r_2 = \delta_H\}} + 1_{\{r_2 < \delta_H\}}\right] f'(r) = 0$ (CNS)</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$\mathbf{W}(K_2)$</td><td rowspan="2">$K_2 \searrow$</td><td>$\lim\limits_{r \to r_1} r^{n-1} f'(r) = 0$ (CNS)</td></tr>
<tr><td>Si $\sqrt{A}K_2(r_2) = 0$ alors $\sqrt{A}f(r_2) = 0$ est (CN) et (CS sous D_2)</td></tr>
<tr><td>$K_2\mathbf{W}(\frac{K_1}{K_2})$
ou
$K_1\mathbf{W}(\frac{K_2}{K_1})$
ou
$(K_1 + K_2)\mathbf{B}(\frac{K_1}{K_1 + K_2})$
ou
$(K_1 + K_2)\mathbf{B}(\frac{K_2}{K_1 + K_2})$</td><td>$\frac{K_1}{K_2} \nearrow$</td><td>Si $\sqrt{A}K_1(r_1) = 0$ alors $\sqrt{A}f(r_1) = 0$ est (CN) et (CS sous D_1)

Si $\sqrt{A}K_2(r_2) = 0$ alors $\sqrt{A}f(r_2) = 0$ est (CN) et (CS sous D_2)</td></tr>
</table>

2.3 Trois types de processus liés aux fonctions A, V, χ et φ d'un espace harmonique symétrique

Dans les propositions suivantes, on donne des couples de fonctions (K_1, K_2) vérifiant (2.2.20) et construites à partir des fonctions A, V, χ et φ correspondant à l'espace harmonique symétrique H. Par mesure A sur un intervalle $(r_1, r_2) \subseteq (0, \delta_H)$ on sous-entendra la mesure de densité A par rapport à la mesure de Lebesgue.

Les processus du premier type font intervenir des fonctions harmoniques φ_1 et φ_2 correspondant à celles utilisées dans la définition des espaces harmoniques, puisqu'elles ne dépendent que de la variable r.

Proposition 2.3.1. *Soient R_1, R_2, r_1 et r_2 des réels finis tels que*

$$0 \leq R_1 \leq r_1 < r_2 \leq R_2 \leq \delta_H.$$

Les deux couples de fonctions (K_1, K_2) définis respectivement par

$$K_1(r) = \varphi_1(r) := \int_{R_1}^{r} \frac{d\rho}{A(\rho)}, \quad K_2(r) = 1, \; r \in (r_1, r_2) \quad \textit{si } R_1 > 0 \textit{ ou } n = 1, \quad (2.3.38)$$

et

$$K_1(r) = 1\,, \quad K_2(r) := \varphi_2(r) = \int_r^{R_2} \frac{d\rho}{A(\rho)}, \ r \in (r_1, r_2) \quad si\ R_2 < \delta_H \ \ ou\ n = 1, \tag{2.3.39}$$

vérifient

$$\begin{cases} \Delta K_i = 0\,, \ i = 1, 2, \\ \int_{r_1}^{r_2} K_1(r) K_2(r) A(r) dr < \infty, \\ W_r\big\{K_1; K_2\big\} = -1/A. \end{cases} \tag{2.3.40}$$

Démonstration. Il est clair que les fonctions φ_1 et φ_2 sont toujours définies vu les hypothèses sur $R_1,\ R_2$ et n. Dans (2.3.40) l'équation différentielle découle facilement pour les deux fonctions de l'expression (2.1.11) du laplacien. La convergence de l'intégrale a été démontrée dans la proposition 2.1.4 p. 50. Le calcul du wronskien est évident. □

Théorème 2.3.1. *Soit H un espace harmonique symétrique de dimension n, de diamètre δ_H. Soient $R_1,\ R_2,\ r_1$ et r_2 des réels finis tels que*

$$0 \le R_1 \le r_1 < r_2 \le R_2 \le \delta_H.$$

Les processus gaussiens centrés définis par

$$\mathbf{X}_1(r) := \mathbf{W}\Big\{ \int_{R_1}^{r} \frac{d\rho}{A(\rho)} \Big\}, \ r_1 < r < r_2 \quad si \quad R_1 > 0 \ \ ou\ n = 1, \tag{2.3.41}$$

et

$$\mathbf{X}_2(r) := \mathbf{W}\Big\{ \int_{r}^{R_2} \frac{d\rho}{A(\rho)} \Big\} \ r_1 < r < r_2, \quad si \quad R_2 < \delta_H \ \ ou\ n = 1, \tag{2.3.42}$$

ont une fonction de covariance triangulaire dont les composantes sont les couples $K_1,\ K_2$ donnés par (2.3.38) – (2.3.39) respectivement. Ils ont un D-K-L sur (r_1, r_2) muni de la mesure A dont les couples (f, λ) sont solutions de l'équation différentielle

$$\Delta f + \frac{1}{\lambda} f = 0 \tag{2.3.43}$$

avec la condition en r_2 pour $\mathbf{X}_1$,

$$\lim_{r \to r_2} \big[(\delta_H - r)^{n_H - 1}\, 1_{\{r_2 = \delta_H\}} + 1_{\{r_2 < \delta_H\}}\big]\, f'(r) = 0, \tag{2.3.44}$$

et la condition en r_1 pour $\mathbf{X}_2$,

$$\lim_{r \to r_1} r^{n-1} f'(r) = 0. \tag{2.3.45}$$

Pour $\mathbf{X}_1$, si $R_1 = r_1$, on a en r_1 la condition

$$f(r_1) = 0. \tag{2.3.46}$$

Pour $\mathbf{X}_2$, si $R_2 = r_2$ on a en r_2 la condition

$$f(r_2) = 0. \tag{2.3.47}$$

Démonstration. La relation (2.3.43) est une conséquence de (2.3.40), des Théorèmes 1.3.1, 2.2.1 et de la Proposition 2.2.1. Les conditions aux limites (2.3.44) et (2.3.45) se trouvent dans le tableau p. 57, avec $\mathbf{X}_1$ de la forme $W(K_1)$ et $\mathbf{X}_2$ de la forme $W(K_2)$. □

Les processus de second type sont des processus de Wiener pondérés.

Proposition 2.3.2. *Soit* $(r_1, r_2) \subseteq (0, \delta_H)$. *Les fonctions définies sur* (r_1, r_2) *par*

$$K_1(r) = \frac{V(r)}{A(r)}, \quad K_2(r) = \frac{1}{A(r)}, \tag{2.3.48}$$

vérifient

$$\begin{cases} \Delta K_i(r) + \chi'(r) K_i(r) = 0\,, i = 1, 2, \\ W\big(K_1; K_2\big) = -\frac{1}{A}. \end{cases} \tag{2.3.49}$$

Démonstration. Soit $f = 1/A$. On obtient

$$f' = (1/A)' = -A'/A^2 \Rightarrow Af' = -A'/A = -\chi \Rightarrow (Af')' = \chi' \Rightarrow \Delta f = -\chi'/A = -f\chi'.$$

De même avec $g = V/A$ on a

$$\begin{aligned} g' = 1 - VA'/A^2 \Rightarrow Ag' = A - VA'/A = A - V\chi \\ \Rightarrow (Ag')' = A' - A\chi - V\chi' = -V\chi' \Rightarrow \Delta g = -V\chi'/A = -g\chi'. \end{aligned} \tag{2.3.50}$$

Enfin en tenant compte de $V' = A$ il vient

$$W_r\Big(\frac{V}{A}; \frac{1}{A}\Big) = \frac{V}{A} \cdot \Big(-\frac{A'}{A^2}\Big) - \Big(1 - \frac{VA'}{A^2}\Big) \cdot \frac{1}{A} = -\frac{1}{A}.$$

□

Théorème 2.3.2. *Soit H un espace harmonique symétrique de dimension n, de diamètre δ_H. Si R_1, R_2, r_1 et r_2 sont des réels finis tels que*

$$0 \le R_1 \le r_1 < r_2 \le R_2 \le \delta_H,$$

alors les processus gaussiens centrés

$$\mathbf{X}_1(t) := \frac{\mathbf{W}\big\{V(r) - V(R_1)\big\}}{A(r)}, \qquad r_1 < r < r_2, \text{ si } R_2 < \delta_H \text{ ou } n = 1, \tag{2.3.51}$$

et

$$\mathbf{X}_2(t) := \frac{\mathbf{W}\big\{V(R_2) - V(r)\big\}}{A(r)}, \qquad r_1 < r < r_2, \text{ si } R_1 > 0 \text{ ou } n = 1, \tag{2.3.52}$$

ont une fonction de covariance triangulaire avec, pour tout $r \in (r_1, r_2)$,

$$K_1(r) = \frac{V(r) - V(R_1)}{A(r)}, \quad K_2(r) = \frac{1}{A(r)} \qquad \textit{pour } \mathbf{X}_1 \tag{2.3.53}$$

et

$$K_1(r) = \frac{1}{A(r)}, \quad K_2(r) = \frac{V(R_2) - V(r)}{A(r)} \qquad \textit{pour } \mathbf{X}_2. \tag{2.3.54}$$

On a dans les deux cas

$$\begin{cases} \Delta K_i + \chi' K_i = 0 \ \textit{pour } i = 1,2, \\ \int_{r_1}^{r_2} K_1 K_2 A(r) dr < \infty, \\ W_r\big(K_1; K_2\big) = -\frac{1}{A}. \end{cases} \tag{2.3.55}$$

Les couples (f, λ) du D-K-L de $\mathbf{X_1}$ et $\mathbf{X_2}$ sur (r_1, r_2) muni de la mesure A sont solutions sur (r_1, r_2) de

$$\Delta f + (\frac{1}{\lambda} + \chi')f = 0. \tag{2.3.56}$$

Si $r_i = R_i$ et si l'hypothèse sur f dans la condition D_i est satisfaite, la condition en r_i pour $\mathbf{X}_i$ s'écrit,

$$\lim_{r_i} \sqrt{A} f = 0. \tag{2.3.57}$$

Démonstration. Pour les deux processus, la convergence de l'intégrale dans (2.3.55) est une conséquence de (2.1.17). Les deux autres relations dans (2.3.55) découlent de (2.3.49). L'équation (2.3.56) est alors une conséquence des Théorèmes 1.3.1, 2.2.1 et de la Proposition 2.2.1. La condition aux limites (2.3.57) découle de la Proposition 2.2.2, comme on va le voir en examinant les deux cas. Pour $\mathbf{X}_1$ lorsque $r_1 = R_1 > 0$ la fonction K_1 est clairement C^1 sur $[r_1, r_2)$. Si $r_1 = R_1 = 0$ alors K_1 est prolongeable par continuité en r_1 avec $K_1(r_1) = 0$ car

$$\lim_{r \to r_1} K_1(r) = \lim_{r \to 0} \frac{V(r)}{A(r)} = 0$$

(conséquence de (2.1.2) et (2.1.3)). On a en outre $K_1' = (V/A)' = 1 - VA'/A^2$ a une limite en $r_1 = 0$ toujours grâce à (2.1.2) et (2.1.3). Ceci assure que $\sqrt{A}K_1$ est bien C^1 sur $[0, r_2)$.
Le raisonnement est analogue pour $\mathbf{X}_2$ lorsque $r_2 = R_2$, en utilisant cette fois (2.1.16). □

Enfin les processus du troisième type sont des ponts browniens pondérés.

Théorème 2.3.3. *Soit H un espace harmonique symétrique de diamètre δ_H. Si R_1, R_2, r_1 et r_2 sont des réels tels que*

$$0 \le R_1 \le r_1 < r_2 \le R_2 \le \delta_H,$$

alors le processus

$$\mathbf{X}(r) := \big\{V(R_2) - V(R_1)\big\}^{1/2} \frac{\mathbf{B}\Big\{\dfrac{V(r) - V(R_1)}{V(R_2) - V(R_1)}\Big\}}{A(r)}, \qquad r_1 < r < r_2, \tag{2.3.58}$$

est gaussien centré. Sa fonction de covariance est triangulaire, elle s'écrit

$$K(\rho, r) = K_1(\rho)K_2(r) \quad \textit{pour } r_1 < \rho \leq r < r_2,$$

avec

$$\begin{cases} K_1(\rho) = \dfrac{V(\rho) - V(R_1)}{A(\rho)}, \\[2em] K_2(r) = \dfrac{V(R_2) - V(r)}{A(r)}. \end{cases} \tag{2.3.59}$$

Le couple de fonctions (K_1, K_2) *vérifie*

$$\begin{cases} \Delta K_i + \chi' K_i = 0 \quad \textit{pour } i = 1, 2, \\ \int_{r_1}^{r_2} K_1 K_2 A(r) dr < \infty, \\ W_r\big(K_1; K_2\big) = -\frac{1}{A}. \end{cases} \tag{2.3.60}$$

Les couples (f, λ) *du D-K-L de* $\mathbf{X_1}$ *sur* (r_1, r_2) *muni de la mesure* A *sont solutions sur* (r_1, r_2) *de*

$$\Delta f + (\frac{1}{\lambda} + \chi')f = 0. \tag{2.3.61}$$

Si $r_i = R_i$*, et si l'hypothèse sur* f *dans la condition* D_i *est satisfaite, la condition en* r_i *s'écrit*

$$\lim_{r_i} \sqrt{A} f = 0. \tag{2.3.62}$$

Démonstration. Il est clair que si $0 \leq R_1 \leq r_1 < r_2 \leq R_2 \leq \delta_H$, alors la fonction qui à $r \in (r_1, r_2)$ associe $[V(r) - V(R_1)]/[V(R_2) - V(R_1)]$ est croissante et à valeurs dans $(0, 1)$. Donc la définition (2.3.58) a bien un sens. Par linéarité et d'après (2.3.49), l'équation différentielle dans (2.3.60) est bien vérifiée. La convergence de $\int_{r_1}^{r_2} K_1 K_2 A$ est une conséquence de (2.1.17). Pour le wronskien, en utilisant (2.3.49) et par linéarité il vient (en notant $V(R_i) = V_i$),

$$\begin{aligned} W(K_1; K_2) &= (V_2 - V_1) W\Big(\frac{V - V_1}{(V_2 - V_1)A}; \frac{V_2 - V}{(V_2 - V_1)A}\Big) \\ &= (V_2 - V_1)^{-1}\big[V_2 W(V/A; 1/A) + V_1 W(1/A; V/A)\big] \\ &= (V_2 - V_1)^{-1}\big[V_2(-1/A) + V_1(1/A)\big] = -1/A. \end{aligned} \tag{2.3.63}$$

On applique alors les Théorèmes 1.3.1, 2.2.1 et la Proposition 2.2.1. La condition (2.3.62) se démontre comme (2.3.57) dans le théorème précédent, puisque ce sont les mêmes fonctions qui interviennent. □

Tous les D-K-L que nous avons obtenus se rapportent à la mesure de densité A par rapport à celle de lebesgue. La proposition suivante permet de les convertir en des D-K-L correspondant à la mesure de Lebesgue.

Proposition 2.3.3. *Soit $(r_1, r_2) \subseteq (0, \delta_H)$ et ψ une fonction de classe C^1 telle que $\psi' > 0$, envoyant l'intervalle (r_1, r_2) sur l'intervalle (t_1, t_2).*

Si un processus $\mathbf{X} = \{\mathbf{X}(r) : r_1 < r < r_2\}$ vérifiant les hypothèses H_1 et H_2 du Théorème 1.3.1 avec $T = (r_1, r_2)$ et $A = \mu$, a pour D-K-L sur $L^2\big((r_1, r_2), A\big)$

$$\mathbf{X}(r) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{1/2} \xi_k f_k(r), \tag{2.3.64}$$

alors le processus $\tilde{\mathbf{X}} = \{\tilde{\mathbf{X}}(t) : t_1 < t < t_2\}$, obtenu par le changement de variable

$$\tilde{\mathbf{X}}(t) = \Big\{\frac{A(r)}{\psi'(r)}\Big\}^{1/2} \mathbf{X}(r) \quad \textit{avec} \;\; t = \psi(r), \;\; t \in (t_1, t_2), \tag{2.3.65}$$

vérifie également les hypothèses H_1 et H_2 du Théorème 1.3.1 et a un D-K-L sur $L^2\big(t_1, t_2\big)$ donné par

$$\tilde{\mathbf{X}}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{1/2} \xi_k \tilde{f}_k(t), \tag{2.3.66}$$

avec

$$\tilde{f}_k(t) := \Big\{\frac{A(r)}{\psi'(r)}\Big\}^{1/2} f_k(r). \tag{2.3.67}$$

Démonstration. Soit $f \in L^2\big((r_1, r_2), A\big)$. Définissons $\tilde{f}$ par le changement de variable $t = \psi(r)$ en posant

$$\tilde{f}(t) = \Big(\frac{A}{\psi'}\Big)^{1/2} f(r).$$

Si on note, pour $s \in (t_1, t_2)$ et $\rho \in (r_1, r_2)$,

$$s = \psi(\rho), \;\text{ donc } ds = \psi'(\rho) d\rho,$$

alors la fonction de covariance de $\tilde{\mathbf{X}}$ est

$$\tilde{K}(s, t) = \Big\{\frac{A(\rho)A(r)}{\psi'(\rho)\psi'(r)}\Big\}^{1/2} K(\rho, r).$$

Ceci assure d'une part que H_2 est vérifiée car

$$\int_{(t_1, t_2)} \tilde{K}(t, t) dt = \int_{(r_1, r_2)} K(r, r) A(r) dr < \infty$$

et donc l'existence du D-K-L de $\tilde{\mathbf{X}}$. On a d'autre part

$$\begin{aligned}\tilde{K}(s,t)\tilde{f}(s)ds &= \{\frac{A(\rho)A(r)}{\psi'(\rho)\psi'(r)}\}^{1/2}K(\rho,r)\frac{A(\rho)^{1/2}}{\psi'(\rho)^{1/2}}f(\rho)\psi'(\rho)d\rho \\ &= (\frac{A(r)}{\psi'(r)})^{1/2}K(\rho,r)f(\rho)A(\rho)d\rho.\end{aligned}$$

Il vient alors, quel que soit λ réel,

$$\int_{r_1}^{r_2} K(\rho,r)f(\rho)A(\rho)d\rho = \lambda f(r) \iff \int_{t_1}^{t_2} \tilde{K}(s,t)\tilde{f}(s)ds = \lambda\tilde{f}(t)$$

et

$$\int_{t_1}^{t_2} \tilde{f}^2(s)\,ds = \int_{r_1}^{r_2} \frac{A(\rho)}{\psi'(\rho)}f^2(\rho)\psi'(\rho)d\rho = \int_{r_1}^{r_2} f^2(s)A(\rho)d\rho\cdot$$

On a donc

$$(2.3.64) \iff \tilde{\mathbf{X}}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{1/2}\,\xi_k\,\tilde{f}_k$$

ce qui implique (2.3.66). □

Le résultat suivant précise un cas particulier du précédent.

Théorème 2.3.4. *Soit H un espace harmonique symétrique de fonction caractéristique χ, de diamètre $\delta(H)$ et R un réel fini de l'intervalle $(0,\delta_H]$. Notons $\tilde{V}$ le volume normalisé d'une boule de rayon r, défini par*

$$\tilde{V}(r) = \frac{V(r)}{V(R)}, \quad 0 \le r \le R.$$

Le processus gaussien centré

$$\mathbf{X}(r) = V(R)^{1/2}\,\frac{\mathbf{B}\big(\tilde{V}(r)\big)}{A(r)}\,, \quad 0 < r < R \tag{2.3.68}$$

a pour fonction de covariance

$$K(\rho,r) = V(R)\,\frac{\tilde{V}(\rho)\{1-\tilde{V}(r)\}}{A(\rho)A(r)}\,, \quad 0 < \rho \le r < R. \tag{2.3.69}$$

Les couples $\{(f_k,\lambda_k) : k \ge 1\}$ du D-K-L

$$V(R)^{1/2}\,\frac{\mathbf{B}\big(\tilde{V}(r)\big)}{A(r)} = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{1/2}\,\xi_k\,f_k(r) \tag{2.3.70}$$

sont solutions de l'équation différentielle

$$\Delta f + (\frac{1}{\lambda} + \chi')f = 0 \tag{2.3.71}$$

avec, lorsque l'hypothèse sur f dans la condition D_i est satisfaite, les conditions

$$\lim_0 \sqrt{A} f = \lim_R \sqrt{A} f = 0. \tag{2.3.72}$$

Avec le changements de variable

$$t = \tilde{V}(r) \tag{2.3.73}$$

on a le D-K-L sur $(0, 1)$ muni de la mesure de Lebesgue,

$$V(R) \frac{\mathbf{B}(t)}{A \circ \tilde{V}^{-1}(t)} = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{1/2} \xi_k \left\{ V(R)^{1/2} f_k\big(\tilde{V}^{-1}(t)\big) \right\} \tag{2.3.74}$$

Démonstration. On est dans un cas particulier du Théorème 2.3.3 avec

$$r_1 = R_1 = 0, \; r_2 = R_2 = R \;\text{ donc } V(R_2) - V(R_1) = V(R),$$

d'où (2.3.71) et (2.3.72). En utilisant ensuite les relations (2.3.66) et (2.3.67) de la proposition 2.3.3 avec

$$\psi(r) = \tilde{V}(r), \quad \psi'(r) = \frac{A(r)}{V(R)},$$

nous obtenons le D-K-L

$$V(R)^{1/2} \frac{B(t)}{A \circ \tilde{V}^{-1}(t)} = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{1/2} \xi_k \Big\{ V(R)^{1/2} f_k\big(\tilde{V}^{-1}(t)\big) \Big\}.$$

□

2.4 Transformation de Liouville

Dans cette section on suppose satisfaites les hypothèses du Théorème 2.2.1 et en outre que

$$0 < r_1 < r_2 < \delta_H.$$

Ceci implique que l'hypothèse sur f dans D_1 et D_2 est toujours satisfaite. On suppose de plus que la fonction de covariance triangulaire $K_1 K_2$ vérifie les hypothèses suivantes. Pour $i = 1$ et 2 on a

$$K_i(r_i) = 0 \quad \text{ou} \quad K_i \text{ est dérivable en } r_i.$$

Remarquons que ces hypothèses sont satisfaites pour les processus des Théorèmes 2.3.1-2.3.4.

Proposition 2.4.1. *Avec les notations*

$$z := \pi \frac{r - r_1}{r_2 - r_1}, \quad u(z) := A(r)^{1/2} f(r), \quad \mu^2 := \frac{w}{\lambda} \left(\frac{r_2 - r_1}{\pi} \right)^2 \tag{2.4.75}$$

et

$$g(z) := \left(\frac{r_2 - r_1}{\pi}\right)^2 \{L - \frac{A''}{2A} + \left(\frac{A'}{2A}\right)^2\}\big(r_1 + \frac{z}{\pi}(r_2 - r_1)\big) \tag{2.4.76}$$

l'équation différentielle (2.2.27) *avec les conditions aux limites* (2.2.28) *est équivalente à l'équation différentielle*

$$\frac{d^2u}{dz^2} + (\mu^2 - g(z))u = 0\,, \quad 0 < z < \pi, \tag{2.4.77}$$

avec les conditions aux limites données dans le tableau suivant en fonction des propriétés de K_1 *et* K_2 *:*

	$K_1(r_1) = 0$	$\exists K_1'(r_1),\ K_1(r_1) > 0,$
$K_2(r_2) = 0$	$\begin{cases} u(0) = 0 \\ u(\pi) = 0 \end{cases}$	$\begin{cases} u'(0) - hu(0) = 0 \\ u(\pi) = 0 \end{cases}$
$\exists K_2'(r_2),\ K_2(r_2) > 0$	$\begin{cases} u(0) = 0 \\ u'(\pi) + Hu(\pi) = 0 \end{cases}$	$\begin{cases} u'(0) - hu(0) = 0 \\ u'(\pi) + Hu(\pi) = 0 \end{cases}$

avec

$$h := \{\frac{1}{2A} + \frac{K_1'}{K_1}\}(r_1) \ \textit{et}\ H := -\{\frac{1}{2A} + \frac{K_2'}{K_2}\}(r_2). \tag{2.4.78}$$

Remarque 2.4.1. Les signes devant h et H ont été choisis pour se conformer aux notations traditionelles dans la théorie des équations de Sturm-Liouville. Voir à ce sujet les chapitres 1 de [?] et [?]. La raison en est la suivante. Si u est solution de (2.4.77) avec les conditions aux limites $u'(0) - hu(0) = 0$ et $u'(\pi) + Hu(\pi) = 0$, la fonction $\overline{u}(z) := u(\pi - z)$ est solution de (2.4.77) avec les conditions aux limites $\overline{u}'(0) - H\overline{u}(0) = 0$ et $\overline{u}'(\pi) + h\overline{u}(\pi) = 0$. Donc avec ces notations on peut étendre facilement certains résultats en échangeant les rôles de 0 et π, puis de h et H.

Démonstration de la Proposition 2.4.1 En notant u', u'', f, f'' les dérivées successives de u et f par rapport à z et r respectivement, $A(r) = A$ et $K = (r_2 - r_1)/\pi = dr/dz$, il vient

$$\begin{aligned} u &= A^{1/2}f, \\ u' &= (A'A^{-1/2}f/2 + A^{1/2}f')K, \\ u'' &= (A''A^{-1/2}f/2 - (A')^2A^{-3/2}f/4 + A'A^{-1/2}f'/2 + A'A^{-1/2}f'/2 + A^{1/2}f'')K^2. \end{aligned}$$

En remplaçant $f(r)$ par $A^{-1/2}(r)u(z)$ dans cette dernière égalité, et compte tenu de $A'f' + Af'' + (w/\lambda + L)fA = 0$, on obtient

$$u''(z) = K^2[(A''/2A) - (A'/(2A))^2 - (w/\lambda) - L](r)u(z)$$

qui n'est autre que (2.4.77).

Pour les conditions aux limites on utilise la Proposition 2.2.2 lorsque $K(r_i) = 0$ ou le calcul suivant pour $K(r_i) \neq 0, i = 1, 2$. Des calculs faits plus haut on tire tout d'abord

$$f' = u'/(KA^{1/2}) - f/(2A) = u'/(KA^{1/2}) - u/(2A^{3/2})$$

donc

$$\begin{aligned} A[K_1 f' - K_1' f] &= A[K_1\{u'/(KA^{1/2}) - u/(2A^{3/2})\} - K_1' u/A^{1/2}] \\ &= K_1 A^{1/2} u' - u[K_1/(2A^{1/2}) + K_1' A^{1/2}] \quad (2.4.79) \end{aligned}$$

et la condition en r_1 en découle. Le calcul est analogue en r_2. □

Corollaire 2.4.1. *Avec les notations de la Proposition 2.4.1, on suppose en outre*

$$\int_{r_1}^{r_2} \{L - \frac{A''}{2A} + \left(\frac{A'}{2A}\right)^2\}(r)\, dr < \infty.$$

Alors en notant

$$I_1 = \frac{r_2 - r_1}{2\pi^2} \int_{r_1}^{r_2} \{L - \frac{A''}{2A} + \left(\frac{A'}{2A}\right)^2\}(r)\, dr, \quad (2.4.80)$$

$$I_2 = H + \pi I_1, \quad (2.4.81)$$

$$I_3 = h + \pi I_1, \quad (2.4.82)$$

$$I_4 = I_1 + \frac{h + H}{\pi}, \quad (2.4.83)$$

on a les développements asymptotiques suivants pour $k \to \infty$.

	$K_1(r_1) = 0$	$\exists K_1'(r_1), K_1(r_1) > 0$
$K_2(r_2) = 0$	$\frac{k^2\pi^2\lambda_k}{w(r_2 - r_1)^2} = 1 - \frac{2I_1}{k^2} + O(\frac{1}{k^3})$	$\frac{(k-1/2)^2\pi^2\lambda_k}{w(r_2 - r_1)^2} = 1 - \frac{2I_2}{\pi(k-1/2)^2} + O(\frac{1}{k^3})$
$\exists K_2'(r_2),\ K_2(r_2) > 0$	$\frac{(k-1/2)^2\pi^2\lambda_k}{w(r_2 - r_1)^2} = 1 - \frac{2I_3}{\pi(k-1/2)^2} + O(\frac{1}{k^3})$	$\frac{(k-1)^2\pi^2\lambda_k}{w(r_2 - r_1)^2} = 1 - \frac{2I_4}{(k-1)^2} + O(\frac{1}{k^3})$

Démonstration. Pour les conditions aux limites $u(0) = u(\pi) = 0$ on a (voir [**?**] relation (2.19) p. 12),

$$\mu_k = \sqrt{\frac{w}{\lambda_k}}\frac{r_2 - r_1}{\pi} = k + c/k + O(1/k^2)$$

avec

$$\begin{aligned} c = \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi g(z)dz &= \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi \left(\frac{r_2 - r_1}{\pi}\right)^2 \{L - \frac{A''}{2A} + \left(\frac{A'}{2A}\right)^2\}\big(r_1 + \frac{z}{\pi}(r_2 - r_1)\big)dz \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{r_1}^{r_2} \left(\frac{r_2 - r_1}{\pi}\right) \{L - \frac{A''}{2A} + \left(\frac{A'}{2A}\right)^2\}(r)dr = I_1. \quad (2.4.84) \end{aligned}$$

On en déduit successivement

$$\begin{aligned}
\sqrt{\frac{w}{k^2\lambda_k}}\frac{r_2-r_1}{\pi} &= 1+c/k^2+O(1/k^3),\\
\sqrt{\frac{k^2\lambda_k}{w}}\frac{\pi}{r_2-r_1} &= 1-c/k^2+O(1/k^3),\\
\frac{k^2\lambda_k}{w}\frac{\pi^2}{(r_2-r_1)^2} &= 1-2c/k^2+O(1/k^3).
\end{aligned}$$

Avec les conditions aux limites $u(0)=0, u'(\pi)-Hu(\pi)=0$ on a (voir [?] § 1.2.3 p. 10-11),

$$\mu_k=\sqrt{\frac{w}{\lambda\,_k}}\frac{r_2-r_1}{\pi}=k-1/2+H_1/(k-1/2)+O(1/k^2)$$

avec

$$H_1=H+\frac{1}{2}\int_0^\pi g(z)dz=\pi c=H+\pi I_1.$$

On en déduit successivement

$$\begin{aligned}
\sqrt{\frac{w}{(k-1/2)^2\lambda_k}}\frac{r_2-r_1}{\pi} &= 1+H_1/(k-1/2)^2+O(1/k^3),\\
\sqrt{\frac{(k-1/2)^2\lambda_k}{w}}\frac{\pi}{r_2-r_1} &= 1-H_1/(k-1/2)^2+O(1/k^3),\\
\frac{(k-1/2)^2\lambda_k}{w}\frac{\pi^2}{(r_2-r_1)^2} &= 1-2H_1/(k-1/2)^2+O(1/k^3).
\end{aligned}$$

Le cas $u'(0)-hu(0)=0, u'(\pi)=0$ en découle d'après la Remarque 2.4.1. Il suffit de remplacer H par h dans le calcul précédent. Enfin, pour le dernier cas, on a (voir [?], relation (2.15) p. 9),

$$\mu_k=\sqrt{\frac{w}{\lambda\,_k}}\frac{r_2-r_1}{\pi}=k-1+c'/(k-1)+O(1/k^2)$$

avec

$$c'=\frac{h+H+(1/2)\int_0^\pi g(z)dz}{\pi}=\frac{h+H}{\pi}+I_1.$$

On en déduit comme précédemment

$$\frac{(k-1)^2\lambda_k}{w}\frac{\pi^2}{(r_2-r_1)^2}=1-2c'/(k-1)^2+O(1/k^3).$$

□

Théorème 2.4.1. *Soit H un espace harmonique symétrique, de diamètre (éventuellement infini) δ_H. Soient $R_1,\ R_2,\ r_1$ et r_2 des réels finis tels que*

$$0\le R_1\le r_1<r_2\le R_2\le\delta_H \text{ et } 0<r_1<r_2<\delta_H. \tag{2.4.85}$$

On a sous l'hypothèse nulle

$$\liminf\,(\log_2 n)\int_{r_1}^{r_2}\frac{\mathbf{U}_n^2\Big\{\dfrac{V(r)-V(R_1)}{V(R_2)-V(R_1)}\Big\}}{A(r)}\,dr=\frac{(r_2-r_1)^2}{8\big\{V(R_2)-V(R_1)\big\}}. \qquad (2.4.86)$$

Démonstration. On peut appliquer au processus du Théorème 2.3.3 les propositions 1.5.1 et 1.6.1 avec $(a,b)=(r_1,r_2)$, $p=K_1/(K_1+K_2)$, $q=K_1+K_2$. Les relations (1.5.65) et (1.5.66) sont bien vérifiées pour $\eta=1$ puisque $pq=K_1$, $(1-p)q=K_2$ et que K_1 et K_2 sont continues sur $[r_1,r_2]$. La relation (1.6.76) de la Proposition 1.6.1 est vérifiée d'après la proposition précédente pour $c=\pi^2/[w(r_2-r_1)^2]$ et une certaine constante d. On a $w=1$ d'après la troisième ligne de (2.3.55), et on obtient grâce à (1.6.77)

$$\begin{aligned}\liminf\,(\log_2 n)\int_{r_1}^{r_2}\{V(R_2)-V(R_1)\}\frac{\mathbf{U}_n^2\Big\{\dfrac{V(r)-V(R_1)}{V(R_2)-V(R_1)}\Big\}}{A^2(r)}\,A(r)\,dr&\\ =\frac{\pi^2}{8c}=\frac{\pi^2}{8}\cdot\frac{(r_2-r_1)^2}{\pi^2}&,\end{aligned}$$

qui donne immédiatement (2.4.86). □

Remarque 2.4.2. La seconde partie le l'hypothèse (2.4.85) est assez restrictive. Elle provient de l'utilisation de la transformation de Liouville dans notre démonstration. Il serait souhaitable de pouvoir s'en passer. L'exemple suivant montre un cas où cela paraît possible, puisqu'on obtient un résultat valable en faisant tendre r_1 vers 0.

Exemple 2.4.1. Prenons pour H l'espace euclidien de dimension N et $0<r_1<r_2$. On a

$$A(r)=\frac{2\pi^{N/2}}{\Gamma(\frac{N}{2})}r^{N-1}\quad\text{et}\quad V(r)=\frac{2\pi^{N/2}}{N\Gamma(\frac{N}{2})}r^N,$$

donc (2.4.86) s'écrit

$$\liminf\,(\log_2 n)\int_{r_1}^{r_2}r^{1-N}\mathbf{U}_n^2\Big(\frac{r^N-r_1^N}{r_2^N-r_1^N}\Big)dr=\frac{N(r_2-r_1)^2}{8(r_2^N-r_1^N)}.$$

En prenant $r_2=1$ et en faisant tendre (sans prétendre être rigoureux) r_1 vers 0, on retrouve (1.6.84) pour les valeurs $\alpha=N$ et $\beta=1-N$.

Deuxième partie

Applications

Chapitre 3

Processus liés à des espaces de courbure constante

Nous suivons pour le début de ce chapitre [?], chapitre 1. Soit $\kappa \in \mathbb{R}$ et M_κ^n l'unique espace simplement connexe, complet au sens Riemanien (*i.e.* toutes les géodésiques issues d'un point sont définies sur la droite réelle tout entière), de dimension n et de courbure sectionnelle constante égale à κ. Le diamètre de cet espace vaut $\delta_\kappa = \pi/\sqrt{\kappa}$ si $\kappa > 0$, $\delta_\kappa = \infty$ si $\kappa \le 0$. Nous avons déjà introduit les fonctions S_κ et C_κ (voir (2.1.12) – (2.1.13) p. 48). Nous utiliserons les relations

$$S_\kappa' = C_\kappa, \quad C_\kappa' = -\kappa S_\kappa, \quad C_\kappa^2 + \kappa S_\kappa^2 = 1, \quad (C_\kappa/S_\kappa)' = -S_\kappa^{-2} \quad S_\kappa(2r) = 2S_\kappa(r)C_\kappa(r). \tag{3.0.1}$$

Nous utiliserons également la fonction Bêta incomplète réduite définie pour $\alpha,\ \beta > 0$ et $x \in [0,1)$ par

$$I(\alpha;\beta;x) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^x t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1} dt = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} B(\alpha;\beta;x), \tag{3.0.2}$$

où B est la fonction Bêta incomplète définie pour $\alpha > 0,\ \beta \in \mathbb{R}$ (voir [?] formules 58 :1-3) par

$$\begin{aligned} B(\alpha;\beta;x) &= \int_0^x t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1} dt && \text{pour } 0 \le x < 1, && (3.0.3)\\ &= 2\int_0^T \sin^{2\alpha-1} t \cos^{2\beta-1} t\, dt && \text{pour } 0 \le T = \arcsin\sqrt{x} \le \frac{\pi}{2}, && (3.0.4)\\ &= 2\int_0^T \sinh^{2\alpha-1} t \cosh^{1-2(\alpha+\beta)} t\, dt && \text{pour } 0 \le T = \arg\tanh\sqrt{x}. && (3.0.5) \end{aligned}$$

On a

$$I(\alpha;\beta;0) = 0\,, \quad I(\alpha;\beta;1) = 1\,, \quad I(\beta;\alpha;1-x) = 1 - I(\alpha;\beta;x) \tag{3.0.6}$$

et donc le tableau de variation, pour $\alpha, \beta > 0$,

x	0		1
$I(\alpha;\beta;x)$	0	$\nearrow$	1

.

Dans l'espace M_κ^n, notons, pour $r \in (0, \delta_\kappa)$,

$$A_{\kappa,n}(r) := A(r) = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)} S_\kappa^{n-1}(r)\,, \tag{3.0.7}$$

$$V_{\kappa,n}(r) := V(r) = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)} \int_0^r S_\kappa^{n-1}(u) du. \tag{3.0.8}$$

La constante
$$\mathcal{A}_n := \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)} \tag{3.0.9}$$
qui apparait devant $S_\kappa^{n-1}(r)$ dans (3.0.7) représente la surface maximale d'une boule lorsque la courbure vaut 1. Pour une courbure nulle on a

$$A_{0,n}(r) = \mathcal{A}_n\, r^n \quad \text{et} \quad V_{0,n}(r) = \mathcal{A}_n\, \frac{r^n}{n} \quad \text{pour } r > 0,\ n \geq 1. \tag{3.0.10}$$

Lemme 3.0.1. *On a*

$$\mathcal{A}_n = \begin{cases} \dfrac{2\pi^{n/2}}{(\frac{n}{2}-1)!}, & \textit{pour } n \textit{ pair}, \\ \\ \frac{2^n \pi^{\frac{n-1}{2}} \left(\frac{n-1}{2}\right)!}{(n-1)!}, & \textit{pour } n \textit{ impair}. \end{cases} \tag{3.0.11}$$

Démonstration. Vu la définition (3.0.9), l'expression est évidente pour n pair. Pour $n = 2m+1$ impair, compte tenu de $\Gamma(m+1/2) = \pi^{1/2}(2m)!2^{-2m}/m!$ (voir [?] p. 3),

$$\mathcal{A}_n = \frac{2\pi^{m+1/2}}{\Gamma(m+1/2)} = \frac{2\pi^{m+1/2}2^{2m}m!}{\pi^{1/2}(2m)!} = \frac{2^n\pi^{(n-1)/2}(\frac{n-1}{2})!}{(n-1)!}. \quad \square$$

On obtient, pour les premières valeurs de n,

$$\mathcal{A}_1 = 2, \quad \mathcal{A}_2 = 2\pi, \quad \mathcal{A}_3 = 4\pi, \quad \mathcal{A}_4 = 2\pi^2, \quad \mathcal{A}_5 = \frac{8\pi^2}{3}, \tag{3.0.12}$$
$$\mathcal{A}_6 = \pi^3 \quad \mathcal{A}_7 = \frac{16\pi^3}{15}, \quad \mathcal{A}_8 = \frac{\pi^4}{3}, \quad \mathcal{A}_9 = \frac{32\pi^4}{105}, \quad \mathcal{A}_{10} = \frac{\pi^5}{12}. \tag{3.0.13}$$

3.1 Calcul du volume d'une boule

3.1.1 Cas d'une courbure strictement positive

L'espace est compact, et nous notons son volume

$$V(M_\kappa^n) = \mathcal{V}_{\kappa,n}.$$

La proposition suivante donne une expression plus explicite que (3.0.8) pour le volume d'une boule.

Proposition 3.1.1. *Soit $\kappa > 0$ et $n \geq 1$ un entier. On a*

$$V_{\kappa,n}(r) = \mathcal{V}_{\kappa,n}\, I\Big(\frac{n}{2}, \frac{n}{2}, \frac{1 - C_\kappa(r)}{2}\Big), \quad r \in \Big(0, \frac{\pi}{\sqrt{\kappa}}\Big), \tag{3.1.14}$$

avec

$$\mathcal{V}_{\kappa,n} = \frac{2\pi^{(n+1)/2}}{\kappa^{n/2}\Gamma(\frac{n+1}{2})} = 2^n\big(\frac{\pi}{\kappa}\big)^{n/2}\frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{\Gamma(n)}. \tag{3.1.15}$$

De plus

$$V_\kappa\big(\frac{\delta_\kappa}{2}\big) = \frac{1}{2}\,\mathcal{V}_{\kappa,n}. \tag{3.1.16}$$

Démonstration. Posons $n = 2m$. Afin de calculer le terme $\int_0^r S_\kappa^{2m-1}(\rho)d\rho$ dans (3.0.8), effectuons le changement de variable

$$s = \frac{1-C_\kappa(\rho)}{2},\ s(1-s) = \frac{1-C_\kappa^2(\rho)}{4} = \frac{\kappa S_\kappa^2(\rho)}{4},\ 2ds = \kappa S_\kappa(\rho)d\rho.$$

On obtient

$$\int_0^r S_\kappa^{2m-1}(\rho)d\rho = \int_0^t \big[\frac{4s(1-s)}{\kappa}\big]^{m-1}\cdot\frac{2}{\kappa}\,ds,$$

et (3.0.8) s'écrit

$$V_{\kappa,n}(r) = \frac{2\pi^m}{\Gamma(m)}\cdot\frac{2^{2m-1}}{\kappa^m}\int_0^t [s(1-s]^{m-1}\,ds = \frac{2^{2m}\pi^m}{\kappa^m\Gamma(m)}B(m,m,t) = \frac{2^{2m}\pi^m\Gamma(m)}{\kappa^m\Gamma(2m)}I(m,m,t).$$

Mais d'autre part (voir [?] p. 3),

$$\frac{\Gamma(m)}{\Gamma(2m)} = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2m-1}\Gamma(m+1/2)},$$

donc on obtient les formules annoncées.
Enfin (3.1.16) est une conséquence de la relation

$$V_{\kappa,n}(\delta_\kappa - R) = \int_0^{\delta_\kappa - R} S_\kappa^{n-1}(r)dr = \int_R^{\delta_\kappa} S_\kappa^{n-1}(\delta_\kappa - r)dr = \int_R^{\delta_\kappa} S_\kappa^{n-1}(r) = \mathcal{V}_{\kappa,n} - V_{\kappa,n}(R)$$

dans le cas $R = \delta_\kappa/2$. □

La proposition précédente fait intervenir la fonction Bêta incomplète dans l'expression du volume d'une boule. Donnons pour cette fonction quelques formules plus explicites que (3.0.3) – (3.0.5). Soit m un entier. On a ([?], formule 58 : 4 : 8 p. 575), pour $x \in [0,1]$,

$$I(m,m,x) = \frac{\Gamma(2m)}{\Gamma(m)^2}B(m,m,x) = \frac{(2m-1)!}{(m-1)!^2}\ x^m\sum_{j=0}^{m-1}\binom{m-1}{j}\frac{(-x)^j}{m+j}. \tag{3.1.17}$$

Pour les premières valeurs de m on obtient

$$I(1,1,x) = x, \tag{3.1.18}$$
$$I(2,2,x) = x^2\left(-2\,x+3\right), \tag{3.1.19}$$
$$I(3,3,x) = x^3\left(6\,x^2-15\,x+10\right), \tag{3.1.20}$$
$$I(4,4,x) = x^4\left(-20\,x^3+70\,x^2-84\,x+35\right), \tag{3.1.21}$$
$$I(5,5,x) = x^5\left(70\,x^4-315\,x^3+540\,x^2-420\,x+126\right). \tag{3.1.22}$$

Ensuite, d'après les relations $(A.4.34) - (A.4.35)$ démontrées en annexe p. 131, pour $r \in [0, \pi]$,

$$\pi I(m - \frac{1}{2}, m - \frac{1}{2}, \frac{1 - \cos r}{2}) = r - \frac{\sin(2r)}{2} Q_m(\sin^2 r) \tag{3.1.23}$$

où Q_m est le polynôme

$$Q_m(x) = \sum_{j=2}^{m} \frac{2^{2j-4}(j-2)!^2}{(2j-3)!} x^{j-2} \quad \text{pour } m \geq 1. \tag{3.1.24}$$

Pour les premières valeurs de m :

$$Q_1(x) = 0, \qquad Q_2(x) = 1, \tag{3.1.25}$$

$$Q_3(x) = 1 + \frac{2}{3}x, \qquad Q_4(x) = 1 + \frac{2}{3}x + \frac{8}{15}x^2, \tag{3.1.26}$$

$$Q_5(x) = 1 + \frac{2}{3}x + \frac{8}{15}x^2 + \frac{16}{35}x^3. \tag{3.1.27}$$

Reformulons la Proposition 3.1.1 en utilisant ces expressions.

Proposition 3.1.2. *Soit $\kappa > 0$. Si n est un entier impair, on a pour $r \in (0, \delta_\kappa)$,*

$$V_{\kappa,n}(r) = \mathcal{V}_{\kappa,n} \frac{\sqrt{\kappa}}{\pi}\Big(r - \frac{S_\kappa(2r)}{2} Q_{\frac{n+1}{2}}\{\kappa S_\kappa^2(r)\}\Big). \tag{3.1.28}$$

Si n est un entier pair on a pour $r \in (0, \delta_\kappa)$ et $t := [1 - C_\kappa(r)]/2 \in (0, 1)$,

$$V_{\kappa,n}(r) = \mathcal{V}_{\kappa,n} \frac{(n-1)!}{(\frac{n}{2}-1)!^2}\, t^{n/2} \sum_{j=0}^{\frac{n}{2}-1} \binom{\frac{n}{2}-1}{j} \frac{(-t)^j}{\frac{n}{2}+j}. \tag{3.1.29}$$

Les calculs donnent

$$V_{\kappa,1}(r) = \{\frac{2\pi}{\kappa^{1/2}}\} \frac{\sqrt{\kappa}}{\pi}\, r, \tag{3.1.30}$$

$$V_{\kappa,3}(r) = \{\frac{2\pi^2}{\kappa^{3/2}}\} \frac{\sqrt{\kappa}}{\pi} \{r - \frac{S_\kappa(2r)}{2}\}, \tag{3.1.31}$$

$$V_{\kappa,5}(r) = \{\frac{\pi^3}{\kappa^{5/2}}\} \frac{\sqrt{\kappa}}{\pi} \{r - \frac{S_\kappa(2r)}{2}\big[1 + \frac{2\kappa}{3}S_\kappa^2(r)\big]\}, \tag{3.1.32}$$

$$V_{\kappa,7}(r) = \{\frac{\pi^4}{3\kappa^{7/2}}\} \frac{\sqrt{\kappa}}{\pi} \{r - \frac{S_\kappa(2r)}{2}\big[1 + \frac{2\kappa}{3}S_\kappa^2(r) + \frac{8\kappa^2}{15}S_\kappa^4(r)\big]\}, \tag{3.1.33}$$

$$V_{\kappa,9}(r) = \{\frac{\pi^5}{12\kappa^{9/2}}\} \frac{\sqrt{\kappa}}{\pi} \{r - \frac{S_\kappa(2r)}{2}\big[1 + \frac{2\kappa}{3}S_\kappa^2(r) + \frac{8\kappa^2}{15}S_\kappa^4(r) + \frac{16\kappa^3}{35}S_\kappa^6(r)\big]\}. \tag{3.1.34}$$

Pour les dimensions paires, avec $r \in (0, \delta_\kappa)$ et $t = [1 - C_\kappa(r)]/2 \in (0, 1)$,

$$\begin{aligned}
V_{\kappa,2}(r) &= 4\,\big(\frac{\pi}{\kappa}\big)\; t, && (3.1.35)\\
V_{\kappa,4}(r) &= \frac{8}{3}\big(\frac{\pi}{\kappa}\big)^2\, t^2\big\{-2\,t+3\big\}, && (3.1.36)\\
V_{\kappa,6}(r) &= \frac{16}{15}\big(\frac{\pi}{\kappa}\big)^3\, t^3\big\{6\,t^2-15\,t+10\big\}, && (3.1.37)\\
V_{\kappa,8}(r) &= \frac{32}{105}\big(\frac{\pi}{\kappa}\big)^4\, t^4\big\{-20\,t^3+70\,t^2-84\,t+35\big\}, && (3.1.38)\\
V_{\kappa,10}(r) &= \frac{64}{945}\big(\frac{\pi}{\kappa}\big)^5\, t^5\big\{70\,t^4-315\,t^3+540\,t^2-420\,t+126\big\}. && (3.1.39)
\end{aligned}$$

3.1.2 Cas d'une courbure strictement négative

L'espace n'est plus compact, c'est la fonction Bêta incomplète non réduite qu'on va utiliser.

Proposition 3.1.3. *Soit $\kappa < 0$ et $n \geq 1$ un entier. On a*

$$V_{\kappa,n}(r) = \frac{\mathcal{A}_n}{2(-\kappa)^{n/2}} B\big(\frac{n}{2}, \frac{1-n}{2}, \tanh^2(\sqrt{-\kappa}\, r)\big) \tag{3.1.40}$$

Démonstration. En effectuant le changement de variable $s = \sqrt{-\kappa}\, u$ on obtient

$$V_{\kappa,n}(r) = \mathcal{A}_n \int_0^r S_\kappa^{n-1}(u)du = \mathcal{A}_n(\sqrt{-\kappa})^{-n} \int_0^{\sqrt{-\kappa}\, r} \sinh^{n-1} s ds \tag{3.1.41}$$

et on utilise la définition (3.0.5) avec $\alpha = n/2$, $\beta = (1-n)/2$, $T = r\sqrt{-\kappa}$ donc $\tanh^2(\sqrt{-\kappa}\, r) = x$. □

Proposition 3.1.4. *Si n est un entier impair, on a*

$$V_{\kappa,n}(r) = \frac{\mathcal{A}_n}{(-\kappa)^{(n-1)/2}} \frac{1}{2^{n-1}} \binom{n-1}{\frac{n-1}{2}} \Big\{ (-1)^{\frac{n-1}{2}} r + \frac{S_\kappa(2r)}{2} H_n\big[\kappa S_\kappa^2(r)\big] \Big\} \tag{3.1.42}$$

où H_n est le polynôme

$$H_n(x) = \sum_{j=0}^{\frac{n-3}{2}} \frac{2^{2j}}{2j+1} \binom{j}{2j}^{-1} x^j. \tag{3.1.43}$$

Démonstration. On utilise l'égalité (3.1.41) puis [?], formule 28 :10 :6 p. 268 pour obtenir

$$\begin{aligned}
V_{\kappa,n}(r) &= \frac{\mathcal{A}_n}{(-\kappa)^{n/2}} \int_0^{\sqrt{-\kappa}\, r} \sinh^{n-1} s ds\\
&= \frac{\mathcal{A}_n}{(-\kappa)^{n/2}} \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}(n-2)!!}{(n-1)!!} \Big\{\sqrt{-\kappa}\, r + \cosh(\sqrt{-\kappa} r) \sum_{j=0}^{\frac{n-3}{2}} (-1)^j \frac{(2j)!!}{(2j+1)!!} \sinh^{2j+1}(\sqrt{-\kappa} r),
\end{aligned}$$

avec la notation ([?] § 2 :13 p. 22)

$$k!! := \begin{cases} 1 & \text{si } k = -1, 0, 1, \\ k \times (k-2) \times \cdots \times 3 \times 1 & \text{si } k = 3,\ 5, \ldots, \\ k \times (k-2) \times \cdots \times 2 & \text{si } k = 2, 4, \ldots \end{cases} \tag{3.1.44}$$

qui implique ([?], formule 2 :13 :4 et 5 p. 22) pour $j \geq 0$ et n impair,

$$\begin{aligned} \frac{(2j)!!}{(2j+1)!!} &= \frac{2^{2j}}{(2j+1)!} j!^2 = \frac{2^{2j}}{(2j+1)\binom{2j}{j}}, \\ \frac{(n-2)!!}{(n-1)!!} &= \frac{(n-1)!}{2^{n-1}(\frac{n-1}{2})!^2} = \frac{1}{2^{n-1}} \binom{n-1}{\frac{n-1}{2}}. \end{aligned}$$

On obtient le résultat annoncé en mettant $\sqrt{-\kappa}$ en facteur et en utilisant les égalités $S_\kappa(2r) = 2S_\kappa(r)C_\kappa(r)$ et $\sinh^2(\sqrt{-\kappa} r) = -\kappa S_\kappa^2(r)$. $\square$

Pour les premières valeurs de n on obtient

$$H_1(x) = 0, \qquad H_3(x) = 1, \tag{3.1.45}$$

$$H_5(x) = 1 - \frac{x}{6}, \qquad H_7(x) = 1 - \frac{x}{6} + \frac{x^2}{30}, \tag{3.1.46}$$

$$H_9(x) = 1 - \frac{x}{6} + \frac{x^2}{30} - \frac{x^3}{140}. \tag{3.1.47}$$

Proposition 3.1.5. *Soit $\kappa < 0$ et $n \geq 1$ un entier pair. On a pour $r > 0$, avec $t = C_\kappa(r) - 1$,*

$$V_{\kappa,n}(r) = \frac{\mathcal{A}_n}{(-\kappa)^{n/2}} t^{\frac{n}{2}} \sum_{j=0}^{\frac{n}{2}-1} 2^{\frac{n}{2}-1-j} \binom{\frac{n-2}{2}}{j} \frac{t^j}{\frac{n}{2}+j}. \tag{3.1.48}$$

Démonstration. Avec le changement de variable $s = C_\kappa(u) - 1$ qui implique $s(s+2) = C_\kappa^2(u) - 1 = -\kappa S_\kappa^2(u)$ et $ds = -\kappa S_\kappa(u)$, on obtient

$$\begin{aligned} V_{\kappa,n}(r) &= \mathcal{A}_n(\sqrt{-\kappa})^{-n} \int_0^{\sqrt{-\kappa}\, r} \sinh^{n-1} s ds = \frac{\mathcal{A}_n}{(-\kappa)^{n/2}} \int_0^t [s(s+2)]^{\frac{n-2}{2}} \frac{ds}{(-\kappa)} \\ &= \frac{\mathcal{A}_n}{(-\kappa)^{n/2}} \int_0^t \Big\{ \sum_{k=0}^{\frac{n-2}{2}} \binom{\frac{n-2}{2}}{k} (s^2)^{\frac{n-2}{2}-k} (2s)^k \Big\} ds \\ &= \frac{\mathcal{A}_n}{(-\kappa)^{n/2}} \int_0^t \Big\{ \sum_{k=0}^{\frac{n-2}{2}} 2^k \binom{\frac{n-2}{2}}{k} s^{n-2-k} \Big\} ds = \frac{\mathcal{A}_n}{(-\kappa)^{n/2}} \sum_{k=0}^{\frac{n-2}{2}} 2^k \binom{\frac{n-2}{2}}{k} \frac{t^{n-1-k}}{n-1-k}. \end{aligned}$$

Le résultat annoncé s'obtient alors par le changement d'indice $j = (n-2)/2 - k = n/2 - 1 - k$. □

Les calculs, pour les premières dimensions impaires, donnent

$$
\begin{aligned}
V_{\kappa,1}(r) &= 2\,r, & (3.1.49)\\
V_{\kappa,3}(r) &= \frac{2\pi}{\kappa}\Big\{-r+\frac{S_\kappa(2r)}{2}\Big\}, & (3.1.50)\\
V_{\kappa,5}(r) &= \frac{\pi^2}{\kappa^2}\Big\{r+\frac{S_\kappa(2r)}{2}\big[1-\frac{\kappa}{6}S_\kappa(r)\big]\Big\}, & (3.1.51)\\
V_{\kappa,7}(r) &= \frac{\pi^3}{3\kappa^3}\Big\{-r+\frac{S_\kappa(2r)}{2}\big[1-\frac{\kappa}{6}S_\kappa^2(r)+\frac{\kappa^2}{30}S_\kappa^4(r)\big]\Big\}, & (3.1.52)\\
V_{\kappa,9}(r) &= \frac{\pi^4}{12\kappa^4}\Big\{r+\frac{S_\kappa(2r)}{2}\big[1-\frac{\kappa}{6}S_\kappa^2(r)+\frac{\kappa^2}{30}S_\kappa^4(r)-\frac{\kappa^3}{140}S_\kappa^6(r)\big]\Big\}. & (3.1.53)
\end{aligned}
$$

Et pour les premières dimensions paires, avec $t = C_\kappa(r) - 1$,

$$
\begin{aligned}
V_{\kappa,2}(r) &= \frac{2\pi}{-\kappa}\ t, & (3.1.54)\\
V_{\kappa,4}(r) &= \frac{2\pi^2}{\kappa^2}t^2\big(1+\frac{t}{3}\big), & (3.1.55)\\
V_{\kappa,6}(r) &= \frac{\pi^3}{-\kappa^3}t^3\big(\frac{4}{3}+t+\frac{t^2}{5}\big), & (3.1.56)\\
V_{\kappa,8}(r) &= \frac{\pi^4}{3\kappa^4}t^4\big(2+\frac{12}{5}t+t^2+\frac{t^3}{7}\big), & (3.1.57)\\
V_{\kappa,10}(r) &= \frac{\pi^5}{-12\kappa^5}t^5\big(\frac{16}{5}+\frac{16}{3}t+\frac{24}{7}t^2+t^3+\frac{t^4}{9}\big). & (3.1.58)
\end{aligned}
$$

3.2 Expression du laplacien

Si χ désigne la fonction caractéristique de l'espace harmonique H, on a vu intervenir au chapitre précédent des équations différentielles de la forme

$$\Delta f + (\alpha + \beta\chi')f = 0$$

avec α et β deux réels. La proposition suivante donne la solution de ces équations dans le cas d'un espace de courbure constante κ.

Proposition 3.2.1. *On a pour tout $\kappa \in \mathbb{R}$ et $r \in (0, \delta_H)$,*

$$
\begin{aligned}
\chi(r) &= (n-1)\frac{C_\kappa(r)}{S_\kappa(r)}, & (3.2.59)\\
\chi'(r) &= -\frac{n-1}{S_\kappa^2(r)}. & (3.2.60)
\end{aligned}
$$

Soit $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$. *Si* f *est une fonction définie sur* $(r_1,r_2)\subseteq(0,\delta_H)$, *on a*

$$\Delta f+(\alpha+\beta\chi')f=0 \iff \frac{1}{S_\kappa^{n-1}}\big(S_\kappa^{n-1}f'\big)'+\{\alpha-\frac{(n-1)\beta}{S_\kappa^2}\}f=0. \tag{3.2.61}$$

Pour $\kappa\neq 0$, *toute solution de* (3.2.61) *est de la forme*

$$f(r)=S_\kappa^{1-n/2}Y\big(C_\kappa(r)\big) \tag{3.2.62}$$

où Y *est solution de l'équation de Legendre associée*

$$(1-x^2)Y''-2xY'+\{\frac{n}{2}(\frac{n}{2}-1)+\frac{\alpha}{\kappa}-\frac{(n-1)\beta+(\frac{n}{2}-1)^2}{1-x^2}\}Y=0. \tag{3.2.63}$$

Pour $\kappa=0$ *et* $\alpha>0$, *toute solution de* (3.2.61) *est de la forme*

$$Y(r)=r^{1-n/2}\,Z_{\frac{n}{2}}\big(\sqrt{\alpha}\,r\big) \tag{3.2.64}$$

où Z_ν *est solution de l'équation de Bessel*

$$x^2Z''+xZ'+(x^2-\nu^2)Z=0. \tag{3.2.65}$$

Démonstration. De (3.0.7), (2.1.11) et $(S_\kappa^{n-1})'/S_\kappa^{n-1}=(n-1)C_\kappa S_\kappa^{n-2}/S_\kappa^{n-1}$ on tire aisément

$$\chi(r)=\Delta r=(n-1)\frac{C_\kappa}{S_\kappa}(r),$$

et (3.2.60) est alors une conséquence de (3.0.1).
Afin de démontrer (3.2.62) et (3.2.63), calculons tout d'abord

$$\begin{aligned}\{S_\kappa^{1-n/2}\}' &= (1-n/2)S_\kappa^{-n/2}C_\kappa,\\ \{S_\kappa^{1-n/2}\}'' &= (n/2)(n/2-1)S_\kappa^{-n/2-1}C_\kappa^2-\kappa(1-n/2)S_\kappa^{1-n/2}\\ &= (n/2-1)S_\kappa^{-n/2-1}\{(n/2)C_\kappa^2+\kappa S_\kappa^2\}.\end{aligned}$$

En posant $f(r)=S_\kappa^{1-n/2}G(r)$ et en utilisant la formule de Leibniz, on obtient

$$\begin{aligned}f'' &= S_\kappa^{1-n/2}G''+2(1-n/2)S_\kappa^{-n/2}C_\kappa G'+(n/2-1)S_\kappa^{-n/2-1}\{(n/2)C_\kappa^2+\kappa S_\kappa^2\}G,\\ f' &= S_\kappa^{1-n/2}G'+(1-n/2)S_\kappa^{-n/2}C_\kappa G.\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}&f''+(n-1)(C_\kappa/S_\kappa)Y'+(\lambda-\beta S_\kappa^{-2})f=\\ &S_\kappa^{1-n/2}G''+\{(2-n)cS_\kappa^{-n/2}S_\kappa^{-n/2}+(n-1)cS_\kappa^{-n/2}\}G'\\ &+\big\{(n/2-1)S_\kappa^{-n/2-1}\{(n/2)C_\kappa^2+\kappa S_\kappa^2\}+(n-1)(1-n/2)S_\kappa^{-1-n/2}C_\kappa^2+(\alpha-\beta S_\kappa^{-2})S_\kappa^{1-n/2}\big\}G.\end{aligned} \tag{3.2.66}$$

Multiplions par $S_\kappa^{n/2-1}$ les deux membres de cette égalité, il vient

$$G'' + \frac{C_\kappa}{S_\kappa} G' + \big\{\kappa(\frac{n}{2}-1) - (\frac{n}{2}-1)^2 \frac{C_\kappa^2}{S_\kappa^2} + \alpha - \frac{\beta}{S_\kappa^2}\big\}\, G = 0.$$

Posons ensuite $x = C_\kappa(r)$ et $Y(x) = G(r)$. On a donc

$$\frac{dG}{dr} = -\kappa S_\kappa(r)\frac{dY}{dx}\,, \quad \frac{d^2G}{dr^2} = -\kappa C_\kappa(r)\frac{dY}{dx} + \kappa^2 S_\kappa^2(r)\frac{d^2Y}{dx^2} = -\kappa x\frac{dY}{dx} + \kappa(1-x^2)\frac{d^2Y}{dx^2}.$$

On obtient alors pour Y l'équation différentielle

$$\kappa(1-x^2)Y'' - 2\kappa x Y' + \big\{\kappa(\frac{n}{2}-1) - (\frac{n}{2}-1)^2\frac{\kappa x^2}{1-x^2} + \alpha - \frac{\kappa\beta}{1-x^2}\big\}Y = 0,$$

qu'on peut écrire sous la forme

$$(1-x^2)Y'' - 2xY' + \big\{(\frac{n}{2}-1) + (\frac{n}{2}-1)^2 + \frac{\alpha}{\kappa} - \frac{\beta + (\frac{n}{2}-1)^2}{1-x^2}\big\}Y = 0,$$

qui n'est autre que (3.2.63). Enfin pour $\kappa = 0$, (3.2.61) devient

$$f'' + \frac{n-1}{r}f' + \big(\alpha + \frac{1-n}{r^2}\big)f = 0.$$

Si on pose

$$\nu = n/2, \quad q = 1, \quad p = 1 - n/2, \quad \lambda\sqrt{\alpha},$$

soit

$$1 - 2p = n - 1, \quad p^2 - \nu^2 q^2 = 1 - n, \quad \lambda^2 q^2 r^{2q} = \alpha r^2,$$

cette équation s'écrit

$$r^2 f'' + (1-2p) r f' + (\lambda^2 q^2 r^{2q} + p^2 - \nu^2 q^2) f = 0$$

dont toute solution est de la forme $r^p Z_\nu(\lambda r^q)$, où Z_ν vérifie l'équation de Bessel (3.2.65) (voir par exemple [**?**] relations 9.1.1 p. 358 et 9.1.53 p. 362). Et compte tenu des valeurs de p et q, $r^p Z_\nu(\lambda r^q)$ est bien la fonction définie par (3.2.64). □

3.3 Étude de quelques processus liés à M_κ^n

Étudions à présent les processus de la forme (0.2.26) évoqués dans l'introduction p. 19.

Proposition 3.3.1. *Soit $\kappa \neq 0$ et $n \geq 1$. Soient R_1, R_2, r_1 et r_2 des réels finis tels que*

$$0 \leq R_1 \leq r_1 < r_2 \leq R_2 \leq \delta_\kappa.$$

Les processus gaussiens centrés définis par

$$\mathbf{X}_1(r) := \mathbf{W}\{\int_{R_1}^{r} \frac{d\rho}{A_{\kappa,n}(\rho)}\}\,, \quad r_1 < r < r_2, \qquad si \quad R_1 > 0 \ ou\ n = 1, \tag{3.3.67}$$

et

$$\mathbf{X}_2(r) := \mathbf{W}\{\int_{r}^{R_2} \frac{d\rho}{A_{\kappa,n}(\rho)}\}\,, \quad r_1 < r < r_2, \qquad si \quad R_2 < \delta_H \ ou\ n = 1, \tag{3.3.68}$$

on un D-K-L sur (r_1, r_2) *muni de la mesure de densité* $A_{\kappa,n}$ *pour lequel les couples* (f_k, λ_k), $k \geq 1$ *sont de la forme* (f, λ) *avec*

$$f(r) \propto S_\kappa^{1-n/2}(r) Y\big(C_\kappa(r)\big) \tag{3.3.69}$$

où Y *est solution de l'équation de Legendre associée*

$$(1-x^2)Y'' - 2xY' + \{\frac{n}{2}(\frac{n}{2} - 1) + \frac{1}{\lambda\kappa} - \frac{(\frac{n}{2}-1)^2}{1-x^2}\}Y = 0,$$

avec la condition en r_2 *pour* $\mathbf{X}_1$,

$$\lim_{r \to r_2} \big[(r_2 - r)^{n-1}\, 1_{\{r_2 = \delta_\kappa\}} + 1_{\{r_2 < \delta_\kappa\}}\big]\, f'(r) = 0, \tag{3.3.70}$$

et la condition en r_1 *pour* $\mathbf{X}_2$,

$$\lim_{r \to r_1} r^{n-1} f'(r) = 0. \tag{3.3.71}$$

Si de plus pour $i = 1$ *ou* $i = 2$, $r_i = R_i$, *alors on a en* r_i *pour* $\mathbf{X}_i$ *la condition*

$$\lim_{r_i} f = 0.$$

Démonstration. On combine le Théorème 2.3.1 p. 58 et la Proposition 3.2.1. Les composantes de la fonction de covariance des deux processus satisfont (3.2.61) pour $\alpha = \beta = 0$, donc les fonctions du D-K-L satisfont cette même équation pour $\alpha = 1/\lambda$ et $\beta = 0$. Pour les conditions aux limites, on remarque que pour $\kappa > 0$ la relation $S_\kappa(r) = S_\kappa(\delta_\kappa - r)$ implique $n_H = n$ lorsque H est un espace de courbure constante $\kappa > 0$. □

Donnons une application de ce résultat.

Proposition 3.3.2. *On a sur* $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ *muni de la mesure* $2\pi \sin r$ *le D-K-L*

$$\mathbf{W}\big(\frac{1}{2\pi}\log(\tan\frac{r}{2})\big) = \sum_{k=1}^{\infty} \{\frac{1}{(2k-1)2k}\}^{\frac{1}{2}}\, \xi_k\, (\frac{4k-1}{2\pi})^{1/2}\, P_{2k-1}(\cos r), \tag{3.3.72}$$

et sur $(0, 1)$ *muni de la mesure de Lebesgue le D-K-L*

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{W}\big(\log\frac{1+t}{1-t}\big) = \sum_{k=1}^{\infty} \{\frac{1}{(2k-1)2k}\}^{\frac{1}{2}}\, \xi_k\, (4k-1)^{1/2}\, P_{2k-1}(t), \quad 0 < t < 1. \tag{3.3.73}$$

Démonstration. Appliquons la Proposition 3.3.1 avec $n = 2$, $\kappa = 1$, $r_1 = R_1 = \pi/2$ et $R_2 = \pi$. On a $A_{\kappa,n}(r) = \mathcal{A}_2 \sin r = 2\pi \sin r$. Le processus $\mathbf{X_1}$ de cette proposition est celui du membre de gauche de (3.3.72). Les fonctions propres de son D-K-L sont donc de la forme $f(r) \propto Y(\cos r)$ où Y est une fonction de Legendre d'indice supérieur $\mu = 0$, donc un polynôme de Legendre vérifiant $Y(0) = 0$ et $\lim_{r\to\pi}(\pi - r)Y'(r) = 0$. D'après ($A$.3.27) le polynôme de Legendre P_{2k-1} vérifie la première de ces conditions pour tout $k \geq 1$, et il vérifie évidemment la seconde. On en déduit pour tout $k \geq 1$ la valeur propre λ telle que

$$\frac{1}{\lambda} = (2k-1)(2k).$$

Or

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k(2k-1)} = \log 2,$$

et la fonction de covariance K du processus est telle que

$$K(r,r) = \frac{1}{2\pi}\log(\tan\frac{r}{2}) \text{ donc } \int_{r_1}^{r_2} K(r,r)A_{1,2}(r)dr = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \log(\tan\frac{r}{2})\sin r dr = \log 2.$$

Donc d'après (1.3.38) p. 37 il ne peut y avoir d'autres valeurs propres que $\lambda_k = [2k(2k-1)]^{-1}$ pour $k \geq 1$. On obtient donc le D-K-L (3.3.72) après avoir tiré la constante de normalisation de (A.3.12). On applique à ce D-K-L la Proposition 2.3.3 p. 62 avec pour $r \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$,

$$t = \psi(r) = -\cos r \quad \text{donc} \quad \log(\tan\frac{r}{2}) = \frac{1}{2}\log\frac{1+t}{1-t}, \ \frac{A(r)}{\psi'(r)} = 2\pi.$$

On obtient donc sur $(0, 1)$ muni de la mesure de Lebesgue le D-K-L

$$\sqrt{2\pi}\mathbf{W}\big(\frac{1}{4\pi}\log\frac{1+t}{1-t}\big) = \sum_{k=1}^{\infty} \big\{\frac{1}{(2k-1)2k}\big\}^{\frac{1}{2}} \xi_k \,(4k-1)^{1/2}\, P_{2k-1}(-t)$$

qui correspond bien à (3.3.73) d'après l'égalité en loi $\sqrt{2\pi}\ \mathbf{W}\big(./(4\pi)\big) = 2^{-1/2}\mathbf{W}(.)$ et le fait que P_{2k-1} est impair. □

Proposition 3.3.3. *Soit $\kappa \neq 0$ et $n \geq 1$ un entier. Si R_1, R_2, r_1 et r_2 sont des réels finis tels que*

$$0 \leq R_1 \leq r_1 < r_2 \leq R_2 \leq \delta_\kappa,$$

alors les processus gaussiens centrés définis sur (r_1, r_2) par

$$\mathbf{X}_1(r) := \frac{\mathbf{W}\big\{V_{\kappa,n}(r) - V_{\kappa,n}(R_1)\big\}}{A_{\kappa,n}(r)} \qquad si\ R_2 < \delta_\kappa \ ou\ n = 1, \tag{3.3.74}$$

et

$$\mathbf{X}_2(t) := \frac{\mathbf{W}\big\{V_{\kappa,n}(R_2) - V_{\kappa,n}(r)\big\}}{A_{\kappa,n}(r)} \qquad si\ R_1 > 0 \ ou\ n = 1, \tag{3.3.75}$$

ont un D-K-L sur (r_1, r_2) muni de la mesure de densité $A_{\kappa,n}$ pour lequel les couples (f_k, λ_k), $k \geq 1$ sont de la forme (f, λ) avec

$$f(r) \propto S_\kappa^{1-n/2}(r) Y\big(C_\kappa(r)\big), \tag{3.3.76}$$

où Y est solution de l'équation de Legendre associée

$$(1-x^2)Y'' - 2xY' + \big\{\frac{n}{2}(\frac{n}{2}-1) + \frac{1}{\lambda\kappa} - \frac{(\frac{n}{2})^2}{1-x^2}\big\}Y = 0,$$

avec pour $\mathbf{X}_1$ en r_2 la condition

$$(A_{\kappa,n} f)'(r_2) = 0, \tag{3.3.77}$$

et pour $\mathbf{X}_2$ en r_1 la condition

$$(A_{\kappa,n} f)'(r_1) = 0. \tag{3.3.78}$$

Si de plus pour $i = 1$ ou $i = 2$, $r_i = R_i$, alors on a en r_i pour $\mathbf{X}_i$ la condition

$$\lim_{r_i} \sqrt{A_{\kappa,n}} f = 0. \tag{3.3.79}$$

Démonstration. On combine le Théorème 2.3.2 p. 59 et la Proposition 3.2.1. Les composantes de la fonction de covariance des deux processus satisfont (3.2.61) pour $\alpha = 0$ et $\beta = 1$, donc les fonctions du D-K-L satisfont cette même équation pour $\alpha = 1/\lambda$ et $\beta = 1$. Pour la condition (3.3.77) lorsque $r_2 = R_2$, on a, d'après (2.3.53), $K_2(r) = A_{\kappa,n}^{-1}(r) = A^{-1}(r)$, ce qui implique

$$AW_r\big\{K_2, f\big\} = A(\frac{f'}{A} + \frac{fA'}{A^2}) = \frac{Af' + fA'}{A}.$$

Mais $A_{\kappa,n}$ est non nul en r_2, donc la condition (2.2.28) en r_2 s'écrit $Af' + f'A = 0$ soit $(Af)'(r_2) = 0$. On démontre (3.3.78) de façon similaire. □

Proposition 3.3.4. *Soit $\kappa \neq 0$. Si R_1, R_2, r_1 et r_2 sont des réels tels que*

$$0 \leq R_1 \leq r_1 < r_2 \leq R_2 \leq \delta_\kappa,$$

alors le processus

$$\mathbf{Z}_{\kappa,n}(r) = \frac{\big\{V_{\kappa,n}(R_2) - V_{\kappa,n}(R_1)\big\}^{\frac{1}{2}}}{\mathcal{A}_n} \frac{\mathbf{B}\Big\{\dfrac{V_{\kappa,n}(r) - V_{\kappa,n}(R_1)}{V_{\kappa,n}(R_2) - V_{\kappa,n}(R_1)}\Big\}}{S_\kappa^{n-1}(r)}, \qquad r_1 < r < r_2 \tag{3.3.80}$$

a un D-K-L sur (r_1, r_2) muni de la mesure de densité $A_{\kappa,n}$ pour lequel les couples (f_k, λ_k), $k \geq 1$ sont de la forme (f, λ) avec

$$f(r) \propto S_\kappa^{1-n/2} Y\big(C_\kappa(r)\big), \tag{3.3.81}$$

où Y est solution de l'équation de Legendre associée

$$(1-x^2)Y'' - 2xY' + \{\frac{n}{2}(\frac{n}{2}-1) + \frac{1}{\lambda\kappa} - \frac{(n/2)^2}{1-x^2}\}Y = 0. \tag{3.3.82}$$

Si de plus pour $i=1$ ou $i=2$ on a $r_i = R_i$, alors on a en r_i la condition

$$\lim_{r_i} \sqrt{A_{\kappa,n}} f = 0.$$

Démonstration. Elle est analogue à celle de la proposition précédente. On utilise le Théorème 2.3.3 et la Proposition 3.2.1. Les composantes de la fonction de covariance du processus satisfont (3.2.61) pour $\alpha = 0$ et $\beta = 1$, donc les fonctions de son D-K-L satisfont cette même équation pour $\alpha = 1/\lambda$ et $\beta = 1$. □

Théorème 3.3.1. *Soit $\kappa > 0$ et $R \in (0, \delta_\kappa]$. On a sur $(0,R)$ muni de la mesure $A_{\kappa,n}$ le D-K-L*

$$V_{\kappa,n}(R)^{1/2} \frac{\mathbf{B}\left\{\frac{V_{\kappa,n}(r)}{V_{\kappa,n}(R)}\right\}}{A_{\kappa,n}(r)} = \sum_{k=1}^{\infty} \left\{\frac{1}{\kappa\left(\nu_k - \frac{n}{2}+1\right)\left(\nu_k + \frac{n}{2}\right)}\right\}^{1/2} \xi_k \, \frac{\alpha_k}{\mathcal{A}_n^{1/2}} S_\kappa^{1-\frac{n}{2}}(r) P_{\nu_k}^{-\frac{n}{2}}\big(C_\kappa(r)\big), \tag{3.3.83}$$

avec

$$\alpha_k = \{\int_0^R S_\kappa(r) P_{\nu_k}^{-\frac{n}{2}}\big(C_\kappa(r)\big)^2 dr\}^{-1/2},$$

et en notant pour tout $m > 0$, $\nu_k = \nu_k\left(\frac{n}{2}, \kappa, R\right)$ où

$$\{\nu_k(m,\kappa,R) : k \geq 1\} \tag{3.3.84}$$

est l'ensemble des racines de l'équation d'inconnue $\nu \in \mathbb{C}$:

$$\begin{cases} P_\nu^{-m}\big(C_\kappa(R)\big) = 0 \text{ avec } \Re(\nu) \geq -\frac{1}{2} & \text{si } R < \delta_\kappa \\ \lim_{r\to\delta_\kappa} \sqrt{S_\kappa(r)} P_\nu^{-m}\big(C_\kappa(r)\big) = 0 \text{ avec } \Re(\nu) \geq -\frac{1}{2} & \text{si } R = \delta_\kappa. \end{cases} \tag{3.3.85}$$

Ces racines sont toutes dans $[m, \infty)$, avec en particulier

$$\nu_k(m, \frac{\delta_\kappa}{2}) = m + 2k - 1, \;\; \nu_k(m, \delta_\kappa) = m + k - 1 \text{ pour } k \geq 1. \tag{3.3.86}$$

Sur $(0,R)$ muni de la mesure de Lebesgue le D-K-L (3.3.83) *s'écrit*

$$V_{\kappa,n}(R)^{1/2} \frac{\mathbf{B}\left\{\frac{V_{\kappa,n}(r)}{V_{\kappa,n}(R)}\right\}}{A_{\kappa,n}^{\frac{1}{2}}(r)} = \sum_{k=1}^{\infty} \left\{\frac{1}{\kappa\left(\nu_k - \frac{n}{2}+1\right)\left(\nu_k + \frac{n}{2}\right)}\right\}^{1/2} \xi_k \, \alpha_k S_\kappa^{\frac{1}{2}}(r) P_{\nu_k}^{-\frac{n}{2}}\big(C_\kappa(r)\big). \tag{3.3.87}$$

Démonstration. En appliquant la proposition précédente, on voit que les fonctions propres du D-K-L recherché sont de la forme (3.3.81) et vérifient les conditions aux limites $\lim_0 S_\kappa^{(n-1)/2} f = \lim_R S_\kappa^{(n-1)/2} f = 0$. Remarquons que $\sqrt{A_{\kappa,n}(r)} \sim \mathcal{A}_n S_\kappa^{(N-1)/2} r$ en $r = 0$ ou $r = \pi$ La première de ces conditions et la Proposition (A.3.1) montrent que f est de la forme $f \propto S_\kappa^{1-n/2}(r) P_\nu^{-n/2}(C_\kappa(r))$, avec la constante de proportionnalité α_k. Comme pour tous μ et $\nu \in \mathbb{C}$ on a $P^\mu_{-\nu-1} = P^\mu_\nu$, on ne perd aucune fonction propre en se limitant à chercher celles pour lesquelles $\Re(\nu) \geq -1/2$. On est donc amené à résoudre l'équation (3.3.85). Pour chaque ν solution de cette équation, on voit en comparant (3.3.82) p. 84 et (A.3.6) p. 125 que la valeur propre λ correspondante est donnée par

$$\frac{n}{2}(\frac{n}{2} - 1) + \frac{1}{\lambda\kappa} = \nu(\nu + 1) \text{ donc } \lambda = \frac{1}{\kappa(\nu - \frac{n}{2} + 1)(\nu + \frac{n}{2})}.$$

Lorsque $\kappa > 0$, les racines de (3.3.85) sont réelles d'après [**?**] p. 63. Le fait que de plus ont ait alors $\nu \in [m, \infty)$ est une conséquence de la première assertion de la Proposition A.3.3 en annexe dans le cas $R < \delta_\kappa$, et de la Proposition A.3.1 sinon. Les valeurs particulières (3.3.86) découlent de (A.3.27) pour $R = \delta_\kappa/2$, de la fin de la Proposition (A.3.1) pour $R = \delta_\kappa$. Enfin, on obtient le D-K-L (3.3.87) grâce à la Proposition 2.3.3 en prenant pour X le processus dont le D-K-L est (3.3.83), avec $A(r) = A_{\kappa,n}(r) = \mathcal{A}_n S_\kappa^{n-1}(r)$ et $\psi(r) = r$. □

3.3.1 Processus liés à la sphère euclidienne de dimension n

En appliquant la proposition précédente dans le cas particulier $R_1 = r_1 = 0$ et $R_2 = r_2 = \delta_\kappa$, on obtient, ainsi que nous l'avions annoncé dans l'introduction, une famille de processus indexée par n et dont les valeurs propres du D-K-L sont les valeurs propres du laplacien sur la sphère euclidienne de dimension n, de rayon $1/\sqrt{\kappa}$.

Théorème 3.3.2. *Pour tout entier $n \geq 1$ et $\kappa > 0$, on a sur $(0, \delta_\kappa)$ muni de la mesure $A_{\kappa,n}$ le D-K-L*

$$\frac{\mathcal{V}_{\kappa,n}^{\frac{1}{2}}}{\mathcal{A}_n} \frac{\mathbf{B}\left\{I\left(\frac{n}{2}, \frac{n}{2}, \frac{1-C_\kappa(r)}{2}\right)\right\}}{S_\kappa^{n-1}(r)} = \sum_{k=1}^{\infty} \left\{\frac{1}{\kappa k(k+n-1)}\right\}^{1/2} \xi_k\, f_{\kappa,n,k}(r), \tag{3.3.88}$$

avec

$$\begin{aligned} f_{\kappa,n,k}(r) &= \left\{\frac{\kappa(n+2k-1)(n+k-1)!}{2\mathcal{A}_n\,(k-1)!}\right\}^{1/2} S_\kappa^{1-n/2}(r) P^{-n/2}_{\frac{n}{2}+k-1}\{C_\kappa(r)\} \\ &= \left\{\frac{2^{n-1}\sqrt{\kappa^n}(k-1)!(n+2k-1)}{\mathcal{A}_n \pi(n+k-1)!}\right\}^{1/2} \left(\frac{n-1}{2}\right)! \sin(\sqrt{\kappa} r) G_{k-1}^{(n+1)/2}\big(C_\kappa(r)\big), \end{aligned} \tag{3.3.89}$$

où G_k^m est le polynôme de Gegenbauer d'ordre m, de degré k. Sur $(0, \delta_\kappa)$ muni de la *mesure de Lebesgue on a*

$$\Big\{\frac{\mathcal{V}_{\kappa,n}}{\mathcal{A}_n}\Big\}^{1/2}\frac{\mathbf{B}\big\{I\big(\frac{n}{2},\frac{n}{2},\frac{1-C_\kappa(r)}{2}\big)\big\}}{S_\kappa^{\frac{n-1}{2}}(r)}$$
$$=\sum_{k=1}^{\infty}\Big\{\frac{1}{\kappa k(k+n-1)}\Big\}^{1/2}\xi_k\ \Big\{\frac{\kappa(n+2k-1)(n+k-1)!}{2\,(k-1)!}\Big\}^{1/2}S_\kappa^{\frac{1}{2}}(r)P^{-n/2}_{\frac{n}{2}+k-1}\{C_\kappa(r)\}. \tag{3.3.90}$$

Démonstration. Ce résultat est une conséquence directe de la proposition précédente et de la formule (3.1.14) p. 73. La constante de normalisation pour $f_{\kappa,n,k}$ est obtenue grâce à (A.3.18). L'expression (3.3.89) pour $f_{\kappa,n,k}$ est une conséquence de la relation (A.3.13) démontrée en annexe p. 126 qui donne

$$P^{-n/2}_{n/2+k-1}\big(C_\kappa(r)\big)=2^{n/2}\frac{(k-1)!\big(\frac{n-1}{2}\big)!}{\sqrt{\pi}(n+k-1)!}\sin^{n/2}(\sqrt{\kappa}r)G^{(n+1)/2}_{k-1}\big(C_\kappa(r)\big) \tag{3.3.91}$$

soit

$$\Big\{\frac{\kappa(n+2k-1)(n+k-1)!}{2\,(k-1)!}\Big\}^{1/2}S_\kappa^{1-n/2}(r)P^{-n/2}_{\frac{n}{2}+k-1}\big\{\cos(\sqrt{\kappa}r)\big\}=$$
$$\Big\{\frac{2^{n-1}\sqrt{\kappa^n}(k-1)!(n+2k-1)}{\mathcal{A}_n\pi(n+k-1)!}\Big\}^{1/2}\Big(\frac{n-1}{2}\Big)!\sin(\sqrt{\kappa}r)G^{(n+1)/2}_{k-1}\big(C_\kappa(r)\big). \tag{3.3.92}$$

□

Il est plus commode d'obtenir un D-K-L avec la mesure de Lebesgue. C'est l'objet des deux théorèmes suivants. On distingue les dimensions paires et impaires. On obtient deux familles de processus dont les premiers termes sont respectivement le pont brownien et le processus d'Anderson-Darling.

Sphères de dimension impaire : généralisation du pont brownien

Théorème 3.3.3. *Soit $\kappa>0$. Pour tout entier impair $n\geq 1$, on a pour le processus*

$$\mathbf{B}_{\kappa,n}(r):=\Big\{\frac{\mathcal{V}_{\kappa,n}}{\mathcal{A}_n}\Big\}^{1/2}\frac{\mathbf{B}\big\{I\big(\frac{n}{2},\frac{n}{2},\frac{1-C_\kappa(r)}{2}\big)\big\}}{S_\kappa^{\frac{n-1}{2}}(r)},\quad 0<r<\delta_\kappa, \tag{3.3.93}$$

l'expression

$$\mathbf{B}_{\kappa,n}(r)=\Big\{\frac{\pi}{2^{n-1}\sqrt{\kappa}}\binom{n-1}{\frac{n-1}{2}}\Big\}^{1/2}\frac{\mathbf{B}\left\{\frac{\pi}{\sqrt{\kappa}}\big(r-\frac{\sin(2\sqrt{\kappa}r)}{2\sqrt{\kappa}}\sum_{j=2}^{\frac{n+1}{2}}\frac{2^{2j-4}(j-2)!^2}{(2j-3)!}\sin^{2j-4}(\sqrt{\kappa}r)\right\}}{\sin^{\frac{n-1}{2}}(\sqrt{\kappa}r)} \tag{3.3.94}$$

et le D-K-L sur $(0, \frac{\pi}{\sqrt{\kappa}})$ *muni de la mesure de Lebesgue*

$$\mathbf{B}_{\kappa,n}(r) = \sum_{k=1}^{\infty} \Big\{ \frac{1}{\kappa k(k+n-1)} \Big\}^{1/2} \xi_k \\ \Big\{ \frac{2^{n-1}\sqrt{\kappa}(k-1)!(n+2k-1)}{\pi(n+k-1)!} \Big\}^{1/2} \big(\frac{n-1}{2}\big)! \sin^{\frac{n+1}{2}}(\sqrt{\kappa}r) G_{k-1}^{\frac{n+1}{2}}\big(\cos(\sqrt{\kappa}r)\big) \\ = \sum_{k=1}^{\infty} \Big\{ \frac{1}{\kappa k(k+n-1)} \Big\}^{1/2} \xi_k \Big\{ \frac{\sqrt{\kappa}(k-1)!(n+2k-1)}{\pi(n+k-1)!} \Big\}^{1/2} \sin^{\frac{n+1}{2}}(\sqrt{\kappa}r) U_{\frac{n-3}{2}+k}^{(\frac{n-1}{2})}\big(\cos(\sqrt{\kappa}r)\big), \tag{3.3.95}$$

où G_k^m *est le polynôme de Gegenbauer d'ordre* m*, de degré* k *et* U_k *le polynôme de Tchebitcheff de seconde espèce de degré* k*.*

Démonstration. On part du D-K-L (3.3.90). On y calcule $\mathcal{V}_{\kappa,n}/\mathcal{A}_n$ en utilisant (3.0.11) et (3.1.15). Puis la relation $(A.3.13)$ p. 126 démontrée en annexe donne

$$P_{n/2+k-1}^{-n/2}\big(C_\kappa(r)\big) = 2^{n/2} \frac{(k-1)!\big(\frac{n-1}{2}\big)!}{\sqrt{\pi}(n+k-1)!} \sin^{n/2}(\sqrt{\kappa}r) G_{k-1}^{(n+1)/2}\big(C_\kappa(r)\big) \tag{3.3.96}$$

et donc

$$\Big\{\frac{\kappa(n+2k-1)(n+k-1)!}{2\,(k-1)!}\Big\}^{1/2} S_\kappa^{1/2}(r) P_{\frac{n}{2}+k-1}^{-n/2}\big\{\cos(\sqrt{\kappa}r)\big\} = \\ \Big\{\frac{2^{n-1}\sqrt{\kappa}(k-1)!(n+2k-1)}{\pi(n+k-1)!}\Big\}^{1/2} \big(\frac{n-1}{2}\big)! \sin^{\frac{n+1}{2}}(\sqrt{\kappa}r) G_{k-1}^{(n+1)/2}\big(C_\kappa(r)\big). \tag{3.3.97}$$

Ensuite la relation ([?] p. 258) valable pour m et l entier avec $m \leq l$,

$$2^m m! G_{l-m}^{m+1}(x) = U_l^{(m)}(x)$$

nous donne, pour $m = (n-1)/2$ et $l = (n-1)/2 + k - 1$,

$$2^{\frac{n-1}{2}} \big(\frac{n-1}{2}\big)! G_{k-1}^{(n+1)/2}(x) = U_{(n-1)/2+k-1}^{(\frac{n-1}{2})}(x). \tag{3.3.98}$$

□

Écrivons ces développements pour les premières valeurs de n et une courbure $\kappa = \pi^2$. Les polynômes de Tchebitcheff de seconde espèce vérifient

$$U_k(\cos\theta) = \frac{\sin(k+1)\theta}{\sin\theta}. \tag{3.3.99}$$

D'après [?] § 5.7 p. 258 on a

$$(1-x^2)U_k'(x) = (k+2)xU_k(x) - (k+1)U_{k+1}(x)$$

qui donne, pour $x = \cos\theta$,

$$\begin{aligned} \sin^2\theta\, U'_k(\cos\theta) &= \frac{(k+2)\cos\theta\sin(k+1)\theta - (k+1)\sin(k+2)\theta}{\sin\theta} \\ &= \frac{(k+2)\sin k\theta - k\sin(k+2)\theta}{2\sin\theta}. \end{aligned} \tag{3.3.100}$$

On peut utiliser les relations (3.3.99) et (3.3.100) pour calculer les fonctions propres normalisées dans les cas $n = 1$ et 3. Le volume normalisé a été calculé plus haut (c'est le facteur à droite entre accolades dans les relations (3.1.30) – (3.1.34)) p. 75.
Pour $n = 1$ on retrouve le D-K-L du pont brownien

$$\mathbf{B}(r) = \sum_{k=1}^{\infty} \Big\{\frac{1}{k^2\pi^2}\Big\}^{1/2} \xi_k\, \sqrt{2}\sin(k\pi r). \tag{3.3.101}$$

Pour $n = 3$

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\sqrt{2}}\,\frac{\mathbf{B}\{r - \frac{\sin(2\pi r)}{2\pi}\}}{\sin(\pi r)} \\ &\quad = \sum_{k=1}^{\infty} \Big\{\frac{1}{k(k+2)\pi^2}\Big\}^{1/2} \xi_k \Big\{\frac{2}{k(k+2)}\Big\}^{1/2} \frac{(k+2)\sin(k\pi r) - k\sin\big([k+2]\pi r\big)}{2\sin(\pi r)}. \end{aligned} \tag{3.3.102}$$

Pour $n = 5$,

$$\begin{aligned} &\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\,\frac{\mathbf{B}\Big\{r - \frac{\sin(2\pi r)}{2\pi}\big[1 + \frac{2}{3}\sin^2(\pi r)\big]\Big\}}{\sin^2(\pi r)} \\ &\quad = \sum_{k=1}^{\infty} \Big\{\frac{1}{k(k+4)\pi^2}\Big\}^{1/2} \xi_k \Big\{\frac{(k-1)!(2k+4)}{(k+4)!}\Big\} \sin^3(\pi r) U''_{k+1}(\cos\pi r)\,. \end{aligned} \tag{3.3.103}$$

Pour $n = 7$,

$$\begin{aligned} &\frac{\sqrt{5}}{4}\,\frac{\mathbf{B}\Big\{r - \frac{\sin(2\pi r)}{2\pi}\big[1 + \frac{2}{3}\sin^3(\pi r) + \frac{8}{15}\sin^4(\pi r)\big]\Big\}}{\sin^3(\pi r)} \\ &\quad = \sum_{k=1}^{\infty} \Big\{\frac{1}{k(k+6)\pi^2}\Big\}^{1/2} \xi_k \Big\{\frac{(k-1)!(2k+6)}{(k+6)!}\Big\}^{1/2} \sin^4(\pi r)\, U^{(3)}_{k+2}(\cos\pi r)\,. \end{aligned} \tag{3.3.104}$$

Pour $n = 9$,

$$\begin{aligned} &\frac{\sqrt{35}}{8\sqrt{2}}\,\frac{\mathbf{B}\Big\{r - \frac{\sin(2\pi r)}{2\pi}\big[1 + \frac{2}{3}\sin^2(\pi r) + \frac{8}{15}\sin^4(\pi r) + \frac{16}{35}\sin^6(\pi r)\big]\Big\}}{\sin^4(\pi r)} \\ &\quad = \sum_{k=1}^{\infty} \Big\{\frac{1}{k(k+8)\pi^2}\Big\}^{1/2} \xi_k \Big\{\frac{(k-1)!(2k+8)}{(k+8)!}\Big\}^{1/2} \sin^5(\pi r)\, U^{(4)}_{k+3}(\cos\pi r). \end{aligned} \tag{3.3.105}$$

Sphères de dimension paire : généralisation du processus d'Anderson-Darling

Théorème 3.3.4. *Soit $\kappa > 0$. Pour tout entier pair $n \geq 2$, on a pour le processus*

$$\mathbf{Z}_{\kappa,n}(t) := \frac{(\frac{n}{2}-1)!}{\sqrt{\kappa(n-1)!}} \frac{\mathbf{B}\Big\{\frac{(n-1)!}{(\frac{n}{2}-1)!^2} t^{\frac{n}{2}} \sum_{j=0}^{\frac{n}{2}-1} \binom{\frac{n}{2}-1}{j} \frac{(-t)^j}{\frac{n}{2}+j}\Big\}}{\big\{t(1-t)\big\}^{\frac{n}{4}}}, \quad 0 < t < 1, \tag{3.3.106}$$

le D-K-L sur $(0,1)$ muni de la mesure de Lebesgue

$$\mathbf{Z}_{\kappa,n}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \big\{\frac{1}{\kappa k(k+n-1)}\big\}^{1/2} \xi_k \big\{\frac{(n+2k-1)(n+k-1)!}{(k-1)!}\big\}^{1/2} P_{\frac{n}{2}+k-1}^{-n/2}(1-2t). \tag{3.3.107}$$

Démonstration. Appliquons au processus que nous nommerons X et dont le D-K-L est donné par (3.3.88) la Proposition 2.3.3 avec $t = \psi(r) = (1 - C_\kappa(r))/2$. On a

$$\big\{\frac{A(r)}{\psi'(r)}\big\}^{1/2} = \big\{\frac{\mathcal{A}_n S_\kappa^{n-1}(r)}{\frac{\kappa S_\kappa(r)}{2}}\big\}^{1/2} = \frac{\sqrt{2}}{\kappa} \mathcal{A}_n^{1/2} S_\kappa^{\frac{n-2}{2}}(r)$$

donc avec les notations de la Proposition 2.3.3 on a

$$\begin{aligned}
\tilde{X}(t) &= \big\{\frac{A(r)}{\psi'(r)}\big\}^{1/2} \cdot X(r) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\kappa}} \mathcal{A}_n^{1/2} S_\kappa^{\frac{n-2}{2}}(r) \cdot \frac{\mathcal{V}_{\kappa,n}^{1/2}}{\mathcal{A}_n} \frac{\mathbf{B}\big\{I\big(\frac{n}{2}, \frac{n}{2}, \frac{1-C_\kappa(r)}{2}\big)\big\}}{S_\kappa^{n-1}(r)} \\
&= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\kappa}} \big(\frac{\mathcal{V}_{\kappa,n}}{\mathcal{A}_n}\big)^{1/2} \frac{\mathbf{B}\big\{I\big(\frac{n}{2}, \frac{n}{2}, \frac{1-C_\kappa(r)}{2}\big)\big\}}{S_\kappa^{\frac{n}{2}}(r)}.
\end{aligned}$$

Mais d'après (3.0.11) et (3.1.15) on a

$$\frac{\mathcal{V}_{\kappa,n}}{\mathcal{A}_n} = \frac{2^n (\frac{\pi}{\kappa})^{n/2} (n/2-1)!^2}{2\pi^{n/2}(n-1)!} = \frac{2^{n-1}(n/2-1)!^2}{\kappa^{n/2}(n-1)!} \tag{3.3.108}$$

et

$$S_\kappa^2(r) = [1 - C_\kappa(r)][1 + C_\kappa(r)]/\kappa = 4t(1-t)/\kappa$$

donc on aboutit à

$$\tilde{X}(t) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\kappa}} \cdot \frac{(n/2-1)! 2^{(n-1)/2}}{\kappa^{n/4}\sqrt{(n-1)!}} \cdot \frac{\mathbf{B}\big\{I\big(\frac{n}{2}, \frac{n}{2}, t\big)\big\}}{\big(\frac{4t(1-t)}{\kappa}\big)^{n/4}} = \frac{(n/2-1)!}{\sqrt{\kappa(n-1)!}} \frac{\mathbf{B}\big\{I\big(\frac{n}{2}, \frac{n}{2}, t\big)\big\}}{\big[t(1-t)\big]^{n/4}}.$$

Les fonctions propres du D-K-L de ce processus sont données par

$$\begin{aligned}
\tilde{f}_{\kappa,n,k}(t) &= \big\{\frac{A(r)}{\psi'(r)}\big\}^{1/2} \cdot f_{\kappa,n,k}(r) \\
&= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\kappa}} \mathcal{A}_n^{1/2} S_\kappa^{\frac{n-2}{2}}(r) \cdot \big\{\frac{\kappa(n+2k-1)(n+k-1)!}{2\mathcal{A}_n\,(k-1)!}\big\}^{1/2} S_\kappa^{1-n/2}(r) P_{\frac{n}{2}+k-1}^{-n/2}\big\{C_\kappa(r)\big\} \\
&= \big\{\frac{(n+2k-1)(n+k-1)!}{(k-1)!}\big\}^{1/2} P_{\frac{n}{2}+k-1}^{-n/2}(1-2t). \quad \square
\end{aligned} \tag{3.3.109}$$

On obtient les développements suivants pour les premières valeurs de n pair, et en utilisant le symbole de Pochhammer

$$(k)_n = k(k+1)\dots(k+n-1).$$

Pour $n = 2$ on retrouve le D-K-L du processus d'Anderson-Darling,

$$\frac{\mathbf{B}(t)}{\{t(1-t)\}^{\frac{1}{2}}} = \sum_{k=1}^{\infty} \Big\{\frac{1}{k(k+1)}\Big\}^{1/2} \xi_k \left\{(2k+1)(k)_2\right\}^{1/2} P_k^{-1}(1-2t). \tag{3.3.110}$$

Pour $n = 4$,

$$\frac{1}{\sqrt{6}} \frac{\mathbf{B}(3t^2 - 2t^3)}{t(1-t)} = \sum_{k=1}^{\infty} \Big\{\frac{1}{k(k+3)}\Big\}^{1/2} \xi_k \left\{(2k+3)(k)_4\right\}^{1/2} P_{k+1}^{-2}(1-2t). \tag{3.3.111}$$

Pour $n = 6$,

$$\frac{1}{\sqrt{30}} \frac{\mathbf{B}(6t^5 - 15t^4 + 10t^3)}{\{t(1-t)\}^{\frac{3}{2}}} = \sum_{k=1}^{\infty} \Big\{\frac{1}{k(k+5)}\Big\}^{1/2} \xi_k \left\{(2k+5)(k)_6\right\}^{1/2} P_{k+2}^{-3}(1-2t). \tag{3.3.112}$$

Pour $n = 8$,

$$\frac{1}{\sqrt{140}} \frac{\mathbf{B}(35t^4 - 84t^5 + 70t^6 - 20t^7)}{\{t(1-t)\}^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \Big\{\frac{1}{k(k+7)}\Big\}^{1/2} \xi_k \left\{(2k+7)(k)_8\right\}^{1/2} P_{k+3}^{-4}(1-2t). \tag{3.3.113}$$

Pour $n = 10$,

$$\frac{1}{\sqrt{630}} \frac{\mathbf{B}(126t^5 - 420t^6 + 540t^7 - 315t^8 + 70t^9)}{\{t(1-t)\}^{\frac{5}{2}}} = \sum_{k=1}^{\infty} \Big\{\frac{1}{k(k+9)}\Big\}^{1/2} \xi_k \left\{(2k+9)(k)_{10}\right\}^{1/2} P_{k+4}^{-5}(1-2t). \tag{3.3.114}$$

3.3.2 Processus liés à l'espace projectif réel de dimension n

C'est en considérant des demi-sphères que nous allons retrouver les valeurs propres du laplacien sur les espaces projectifs réels. Ces valeurs propres ont été données dans le tableau de l'introduction p. 15.

Théorème 3.3.5. *Pour tout entier $n \geq 1$ et $\kappa > 0$, on a sur $(0, \frac{\delta_\kappa}{2})$ muni de la mesure $A_{\kappa,n}$ le D-K-L*

$$\frac{\left(\frac{1}{2}\mathcal{V}_{\kappa,n}\right)^{\frac{1}{2}}}{\mathcal{A}_n} \frac{\mathbf{B}\Big\{2I\big(\frac{n}{2}, \frac{n}{2}, \frac{1-C_\kappa(r)}{2}\big)\Big\}}{S_\kappa^{n-1}(r)} = \sum_{k=1}^{\infty} \Big\{\frac{1}{\kappa \cdot 2k(2k+n-1)}\Big\}^{1/2} \xi_k \; g_{\kappa,n}(r) \tag{3.3.115}$$

avec

$$g_{\kappa,n}(r) = \Big\{\frac{\kappa(n+4k-1)(n+2k-1)!}{\mathcal{A}_n\,(2k-1)!}\Big\}^{1/2} S_\kappa^{1-\frac{n}{2}}(r) P^{-\frac{n}{2}}_{\frac{n}{2}+2k-1}\big\{C_\kappa(r)\big\}.$$

Sur $(0, \frac{\delta_\kappa}{2})$ *muni de la mesure de Lebesgue on a le D-K-L*

$$\begin{aligned}&\Big\{\frac{\mathcal{V}_{\kappa,n}}{2\mathcal{A}_n}\Big\}^{1/2} \frac{\mathbf{B}\big\{2I\big(\frac{n}{2},\frac{n}{2},\frac{1-C_\kappa(r)}{2}\big)\big\}}{S_\kappa^{\frac{n-1}{2}}(r)}\\ &= \sum_{k=1}^{\infty}\Big\{\frac{1}{\kappa\cdot 2k(2k+n-1)}\Big\}^{1/2}\xi_k\,\Big\{\frac{\kappa(n+4k-1)(n+2k-1)!}{(2k-1)!}\Big\}^{1/2} S_\kappa^{\frac{1}{2}}(r) P^{-n/2}_{\frac{n}{2}+2k-1}\big\{C_\kappa(r)\big\}.\end{aligned} \tag{3.3.116}$$

Démonstration. On applique le Théorème 3.3.1avec $R = \delta_\kappa/2$ et on procède comme pour la démonstration du Théorème 3.3.2, en utilisant pour la constante de normalisation de $g_{\kappa,n,k}$ la relation $(A.3.19)$ p. 127. □

Ici encore nous sommes amenés à distinguer les dimensions paires et impaires.

Cas d'une dimension paire : généralisation du processus de Rodríguez-Viollaz

Théorème 3.3.6. *Soit* $\kappa > 0$*. Pour tout entier pair* $n \geq 2$*, on a pour le processus*

$$\mathbf{P}_{\kappa,n}(s) := \frac{2^{\frac{n}{2}-1}(\frac{n}{2}-1)!}{\sqrt{\kappa(n-1)!}}\;\frac{\mathbf{B}\Big\{2\frac{(n-1)!}{(\frac{n}{2}-1)!^2}(s/2)^{\frac{n}{2}}\sum_{j=0}^{\frac{n}{2}-1}\binom{\frac{n}{2}-1}{j}\frac{(-s/2)^j}{\frac{n}{2}+j}\Big\}}{\big\{s(2-s)\big\}^{\frac{n}{4}}} \tag{3.3.117}$$

le D-K-L sur $(0,1)$ *muni de la mesure de Lebesgue*

$$\mathbf{P}_{\kappa,n}(s) = \sum_{k=1}^{\infty}\Big\{\frac{1}{\kappa\cdot 2k(2k+n-1)}\Big\}^{1/2}\xi_k\,\Big\{\frac{(n+4k-1)(n+2k-1)!}{(2k-1)!}\Big\}^{1/2} P^{-n/2}_{\frac{n}{2}+2k-1}(1-s). \tag{3.3.118}$$

De plus, si dans le développement précédent on remplace $P^{-n/2}_{\frac{n}{2}+2k-1}(1-s)$ *par* $P^{-n/2}_{\frac{n}{2}+2k-1}(\sigma)$ *on obtient le D-K-L sur* $(0, \frac{\delta_\kappa}{2})$ *du processus*

$$\mathbf{Q}_{\kappa,n}(\sigma) := \frac{2^{\frac{n}{2}-1}(\frac{n}{2}-1)!}{\sqrt{\kappa(n-1)!}}\;\frac{\mathbf{B}\Big\{1-2\frac{(n-1)!}{(\frac{n}{2}-1)!^2}\big(\frac{1-\sigma}{2}\big)^{\frac{n}{2}}\sum_{j=0}^{\frac{n}{2}-1}\binom{\frac{n}{2}-1}{j}\frac{(\frac{\sigma-1}{2})^j}{\frac{n}{2}+j}\Big\}}{\big\{1-\sigma^2\big\}^{\frac{n}{4}}}. \tag{3.3.119}$$

Démonstration. Appliquons au processus que nous nommerons Y et dont le D-K-L est donné par (3.3.115) la Proposition 2.3.3 avec $s = \psi(r) = 1 - C_\kappa(r)$. On a

$$\Big\{\frac{A(r)}{\psi'(r)}\Big\}^{1/2} = \Big\{\frac{\mathcal{A}_n S_\kappa^{n-1}(r)}{\kappa S_\kappa(r)}\Big\}^{1/2} = \Big\{\frac{\mathcal{A}_n}{\kappa}\Big\}^{1/2} S_\kappa^{\frac{n}{2}-1}(r),$$

donc avec les notations de la Proposition 2.3.3 on obtient

$$\begin{aligned}\tilde{Y}(s) &= \Big\{\frac{A(r)}{\psi'(r)}\Big\}^{1/2}\cdot Y(r) = \Big\{\frac{\mathcal{A}_n}{\kappa}\Big\}^{1/2} S_\kappa^{\frac{n}{2}-1}(r)\cdot\frac{\mathcal{V}_{\kappa,n}^{1/2}}{\sqrt{2}\mathcal{A}_n}\frac{\mathbf{B}\big\{2I\big(\frac{n}{2},\frac{n}{2},\frac{1-C_\kappa(r)}{2}\big)\big\}}{S_\kappa^{n-1}(r)}\\ &= \Big(\frac{\mathcal{V}_{\kappa,n}}{2\kappa\mathcal{A}_n}\Big)^{1/2}\frac{\mathbf{B}\big\{2I\big(\frac{n}{2},\frac{n}{2},\frac{1-C_\kappa(r)}{2}\big)\big\}}{S_\kappa^{\frac{n}{2}}(r)}\end{aligned}$$

On a d'une part d'après (3.3.108)

$$\frac{\mathcal{V}_{\kappa,n}}{\mathcal{A}_n} = \frac{2^{n-1}(n/2-1)!^2}{\kappa^{n/2}(n-1)!} \tag{3.3.120}$$

et

$$S_\kappa^2(r) = [1-C_\kappa(r)][1+C_\kappa(r)]/\kappa = s(2-s)/\kappa$$

donc on aboutit à

$$\tilde{Y}(s) = \frac{2^{(n-1)/2}(n/2-1)!}{\sqrt{2}\kappa^{\frac{n+2}{4}}\sqrt{(n-1)!}}\cdot\frac{\mathbf{B}\big\{2I\big(\frac{n}{2},\frac{n}{2},\frac{s}{2}\big)\big\}}{\big(\frac{s(2-s)}{\kappa}\big)^{n/4}} = \frac{2^{(n-2)/2}(n/2-1)!}{\sqrt{\kappa(n-1)!}}\frac{\mathbf{B}\big\{2I\big(\frac{n}{2},\frac{n}{2},\frac{s}{2}\big)\big\}}{\big[s(2-s)\big]^{n/4}}$$

et on obtient l'expression annoncée pour $\mathbf{P}_{\kappa,n}(s)$ en utilisant (3.1.17).
Les fonctions propres du D-K-L de ce processus sont données par

$$\begin{aligned}\tilde{g}_{\kappa,n,k}(t) &= \Big\{\frac{A(r)}{\psi'(r)}\Big\}^{1/2}\cdot g_{\kappa,n,k}(r)\\ &= \Big\{\frac{\mathcal{A}_n}{\kappa}\Big\}^{1/2} S_\kappa^{\frac{n}{2}-1}(r)\cdot\Big\{\frac{\kappa(n+4k-1)(n+2k-1)!}{\mathcal{A}_n\,(2k-1)!}\Big\}^{1/2} S_\kappa^{1-\frac{n}{2}}(r) P_{\frac{n}{2}+2k-1}^{-\frac{n}{2}}\big\{C_\kappa(r)\big\}\\ &= \Big\{\frac{(n+4k-1)(n+2k-1)!}{(2k-1)!}\Big\}^{1/2} P_{\frac{n}{2}+2k-1}^{-n/2}(1-s).\end{aligned} \tag{3.3.121}$$

Enfin le D-K-L du processus (3.3.119) s'obtient facilement à partir de (3.3.118) en remplaçant s par $1-\sigma$ et en tenant compte de l'égalité en loi $\mathbf{B}(1-t)=\mathbf{B}(t)$. Ceci achève la démonstration. □

Nous donnons les développements correspondant aux premières valeurs de n pair. Dans chaque cas, $\sigma = 1-s$ et les égalités sont en loi.
Pour $n=2$ on retrouve les D-K-L des deux processus de Rodríguez-Viollaz,

$$\begin{aligned}\frac{\mathbf{B}(s)}{\{s(2-s)\}^{\frac{1}{2}}} &= \frac{\mathbf{B}(\sigma)}{\{1-\sigma^2\}^{\frac{1}{2}}}\\ &= \sum_{k=1}^{\infty}\Big\{\frac{1}{2k(2k+1)}\Big\}^{1/2}\xi_k\,\big\{(4k+1)(2k+1)_2\big\}^{1/2} P_{2k}^{-1}(1-s).\end{aligned} \tag{3.3.122}$$

Pour $n = 4$,

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \frac{\mathbf{B}\{\frac{s^2(3-s)}{2}\}}{s(2-s)} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \frac{\mathbf{B}\{\frac{\sigma(3-\sigma^2)}{2}\}}{1-\sigma^2}$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty} \Big\{\frac{1}{2k(2k+3)}\Big\}^{1/2} \xi_k \left\{(4k+3)(2k+3)_4\right\}^{1/2} P_{2k+1}^{-2}(1-s). \quad (3.3.123)$$

Pour $n = 6$,

$$\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{15}} \frac{\mathbf{B}\{\frac{s^3(20-15s+3s^2)}{8}\}}{\{s(2-s)\}^{\frac{3}{2}}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{15}} \frac{\mathbf{B}\{\frac{\sigma(15-10\sigma^2+3\sigma^4)}{8}\}}{\{1-\sigma^2\}^{\frac{3}{2}}}$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty} \Big\{\frac{1}{2k(2k+5)}\Big\}^{1/2} \xi_k \left\{(4k+5)(2k+5)_6\right\}^{1/2} P_{2k+2}^{-3}(1-s). \quad (3.3.124)$$

Pour $n = 8$,

$$\frac{4}{\sqrt{35}} \frac{\mathbf{B}\{\frac{s^4(70-84s+35s^2-5s^3)}{16}\}}{\{s(2-s)\}^2} = \frac{4}{\sqrt{35}} \frac{\mathbf{B}\{\frac{\sigma(35-35\sigma^2+21\sigma^4-5\sigma^6)}{16}\}}{\{1-\sigma^2\}^2}$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty} \Big\{\frac{1}{2k(2k+7)}\Big\}^{1/2} \xi_k \left\{(4k+7)(2k+7)_8\right\}^{1/2} P_{2k+3}^{-4}(1-s). \quad (3.3.125)$$

Pour $n = 10$,

$$\frac{8\sqrt{2}}{3\sqrt{5}} \frac{\mathbf{B}\{\frac{s^5(1008-1680s+1080s^2-315s^3+35s^4)}{128}\}}{\{s(2-s)\}^{\frac{5}{2}}} = \frac{8\sqrt{2}}{3\sqrt{5}} \frac{\mathbf{B}\{\frac{\sigma(315-420\sigma^2-378\sigma^4-180\sigma^6+35\sigma^8)}{128}\}}{\{1-\sigma^2\}^{\frac{5}{2}}}$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty} \Big\{\frac{1}{2k(2k+9)}\Big\}^{1/2} \xi_k \left\{(4k+9)(2k+9)_{10}\right\}^{1/2} P_{2k+4}^{-5}(1-s). \quad (3.3.126)$$

Cas d'une dimension impaire

Théorème 3.3.7. *Soit $\kappa > 0$. Pour tout entier impair $n \geq 1$, on a pour le processus*

$$\mathbf{P}_{\kappa,n}(r) := \Big\{\frac{\mathcal{V}_{\kappa,n}}{2\mathcal{A}_n}\Big\}^{1/2} \frac{\mathbf{B}\big\{2I\big(\frac{n}{2}, \frac{n}{2}, \frac{1-C_\kappa(r)}{2}\big)\big\}}{S_\kappa^{\frac{n-1}{2}}(r)}, \quad 0 < r < \frac{\delta_\kappa}{2}, \quad (3.3.127)$$

l'expression

$$\mathbf{P}_{\kappa,n}(r) = \Big\{\frac{\pi}{2^n\sqrt{\kappa}}\binom{n-1}{\frac{n-1}{2}}\Big\}^{1/2} \frac{\mathbf{B}\left\{\frac{2\sqrt{\kappa}}{\pi}\Big(r - \frac{\sin(2\sqrt{\kappa}r)}{2\sqrt{\kappa}} \sum_{j=2}^{\frac{n+1}{2}} \frac{2^{2j-4}(j-2)!^2}{(2j-3)!} \sin^{2j-4}(\sqrt{\kappa}r)\right\}}{\sin^{\frac{n-1}{2}}(\sqrt{\kappa}r)}$$
$$(3.3.128)$$

et le D-K-L sur $(0, \frac{\pi}{2\sqrt{\kappa}})$,

$$
\begin{aligned}
\mathbf{P}_{\kappa,n}(r) &= \sum_{k=1}^{\infty} \Big\{ \frac{1}{\kappa \cdot 2k(2k+n-1)} \Big\}^{1/2} \xi_k \\
&\quad \left\{ \frac{2^n \sqrt{\kappa}(2k-1)!(n+4k-1)}{\pi(n+2k-1)!} \right\}^{1/2} \big(\frac{n-1}{2}\big)! \sin^{\frac{n+1}{2}}(\sqrt{\kappa} r) G_{2k-1}^{\frac{n+1}{2}}\big(\cos(\sqrt{\kappa} r)\big) \\
= \sum_{k=1}^{\infty} \Big\{ \frac{1}{\kappa \cdot 2k(2k+n-1)} \Big\}^{1/2} \xi_k & \left\{ \frac{2\sqrt{\kappa}(2k-1)!(n+4k-1)}{\pi(n+2k-1)!} \right\}^{1/2} \sin^{\frac{n+1}{2}}(\sqrt{\kappa} r) U_{\frac{n-3}{2}+2k}^{(\frac{n-1}{2})}\big(\cos(\sqrt{\kappa} r)\big)
\end{aligned}
\tag{3.3.129}
$$

où G_k^m *est le polynôme de Gegenbauer d'ordre* m*, de degré* k *et* U_k *le polynôme de Tchebitcheff de seconde espèce de degré* k*.*
De plus, si dans les deux développements précédents on remplace r *par* ρ*,* sin *par* cos *et* cos *par* sin*, on obtient le développement sur* $(0,1)$ *du processus*

$$
\mathbf{Q}_{\kappa,n}(\rho) := \Big\{ \frac{\pi}{2^n \sqrt{\kappa}} \binom{n-1}{\frac{n-1}{2}} \Big\}^{1/2} \frac{\mathbf{B}\left\{ \frac{2\sqrt{\kappa}}{\pi}\big(\rho + \frac{\sin(2\sqrt{\kappa}\rho)}{2\sqrt{\kappa}} \sum_{j=2}^{\frac{n+1}{2}} \frac{2^{2j-4}(j-2)!^2}{(2j-3)!} \cos^{2j-4}(\sqrt{\kappa}\rho) \right\}}{\cos^{\frac{n-1}{2}}(\sqrt{\kappa}\rho)}
\tag{3.3.130}
$$

Démonstration. Utilisons le Théorème 3.3.1 p. 84 avec $R = \delta_\kappa/2$. Vu (3.1.14) et (3.1.16) il vient

$$
V_{\kappa,n}(R) = \frac{\mathcal{V}_{\kappa,n}}{2}, \ \frac{V_{\kappa,n}(r)}{V_{\kappa,n}(R)} = 2I(\frac{n}{2}, \frac{n}{2}, \frac{1 - C_\kappa(r)}{2}),
$$

et le processus du membre de gauche de (3.3.83) est bien $\mathbf{P}_{\kappa,n}$. Compte tenu de (3.3.86) on obtient

$$
\nu_k = \frac{n}{2} + 2k - 1, \ \lambda_k = \Big\{ \frac{1}{\kappa \cdot 2k(2k+n-1)} \Big\}^{1/2}
$$

et pour les fonctions propres, en utilisant successivement (A.3.19), (3.3.96) et (3.3.98),

$$
\begin{aligned}
\beta_k S_\kappa^{\frac{1}{2}}(r) P_{\nu_k}^{-\frac{n}{2}}\big(C_\kappa(r)\big) &= \Big\{ \int_0^R S_\kappa(r) P_{\frac{n}{2}+2k-1}^{-\frac{n}{2}}\big(C_\kappa(r)\big)^2 dr \Big\}^{-1/2} S_\kappa^{\frac{1}{2}}(r) P_{\frac{n}{2}+2k-1}^{-\frac{n}{2}}\big(C_\kappa(r)\big) \\
&= \Big\{ \frac{(2k-1)!}{\kappa(n+4k-1)(n+2k-1)!} \Big\}^{-1/2} S_\kappa^{\frac{1}{2}}(r) P_{\frac{n}{2}+2k-1}^{-\frac{n}{2}}\big(C_\kappa(r)\big) \\
= \Big\{ \frac{\kappa(n+4k-1)(n+2k-1)!}{(2k-1)!} \Big\}^{1/2} . 2^{n/2} & \frac{(2k-1)!\big(\frac{n-1}{2}\big)!}{\sqrt{\pi}(n+2k-1)!} S_\kappa^{\frac{1}{2}}(r) \sin^{n/2}(\sqrt{\kappa} r) G_{2k-1}^{(n+1)/2}\big(C_\kappa(r)\big) \\
= \Big\{ \frac{\kappa(n+4k-1)(n+2k-1)!}{(2k-1)!} \Big\}^{1/2} . 2^{1/2} & \frac{(2k-1)!}{\sqrt{\pi}(n+2k-1)!} S_\kappa^{\frac{1}{2}}(r) \sin^{n/2}(\sqrt{\kappa} r) U_{(n-1)/2+2k-1}^{(\frac{n-1}{2})}\big(C_\kappa(r)\big).
\end{aligned}
$$

On obtient après simplification les développements annoncés. □

Nous donnons ces développements pour les premières valeurs de n impair et la courbure $\kappa = \pi^2/4$. Tous ces développements sont donc valables sur $(0,1)$ muni de la mesure de Lebesgue.
Pour $n = 1$ on retrouve le D-K-L du pont brownien

$$\mathbf{B}(r) = \sum_{k=1}^{\infty} \Big\{\frac{1}{k^2\pi^2}\Big\}^{1/2} \xi_k \sqrt{2}\sin(k\pi r). \tag{3.3.131}$$

Pour $n = 3$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\mathbf{B}\{r - \frac{\sin(\pi r)}{\pi}\}}{\sin(\frac{\pi r}{2})} = \sum_{k=1}^{\infty} \Big\{\frac{1}{k(k+1)\pi^2}\Big\}^{1/2} \xi_k \Big\{\frac{1}{k(2k+2)}\Big\}^{1/2} \frac{(k+1)\sin(k\pi r) - k\sin\big([k+1]\pi r\big)}{\sin(\frac{\pi r}{2})}. \tag{3.3.132}$$

Pour $n = 5$,

$$\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \frac{\mathbf{B}\Big\{r - \frac{\sin(\pi r)}{\pi}\big[1 + \frac{2}{3}\sin^2(\frac{\pi r}{2})\big]\Big\}}{\sin^2(\frac{\pi r}{2})} = \sum_{k=1}^{\infty} \Big\{\frac{1}{k(k+2)\pi^2}\Big\}^{1/2} \xi_k \Big\{\frac{(4k+4)}{(2k+4)_5}\Big\} \sin^3(\frac{\pi r}{2}) U''_{k+1}(\cos\frac{\pi r}{2}). \tag{3.3.133}$$

Pour $n = 7$,

$$\frac{\sqrt{5}}{4} \frac{\mathbf{B}\Big\{r - \frac{\sin(\pi r)}{\pi}\big[1 + \frac{2}{3}\sin^2(\frac{\pi r}{2}) + \frac{8}{15}\sin^4(\frac{\pi r}{2})\big]\Big\}}{\sin^2(\frac{\pi r}{2})} = \sum_{k=1}^{\infty} \Big\{\frac{1}{k(k+3)\pi^2}\Big\}^{1/2} \xi_k \Big\{\frac{4k+6}{(2k+6)_7}\Big\}^{1/2} \sin^4(\frac{\pi r}{2}) U^{(3)}_{k+2}(\cos\frac{\pi r}{2}). \tag{3.3.134}$$

Pour $n = 9$,

$$\frac{\sqrt{35}}{8\sqrt{2}} \frac{\mathbf{B}\Big\{r - \frac{\sin(\pi r)}{\pi}\big[1 + \frac{2}{3}\sin^2(\frac{\pi r}{2}) + \frac{8}{15}\sin^4(\frac{\pi r}{2}) + \frac{16}{35}\sin^6(\frac{\pi r}{2})\big]\Big\}}{\sin^2(\frac{\pi r}{2})} = \sum_{k=1}^{\infty} \Big\{\frac{1}{k(k+4)\pi^2}\Big\}^{1/2} \xi_k \Big\{\frac{(4k+8)}{(2k+8)_9}\Big\}^{1/2} \sin^5(\frac{\pi r}{2}) U^{(4)}_{k+3}(\cos\frac{\pi r}{2}). \tag{3.3.135}$$

Les processus de seconde espèce sont les suivants, toujours sur $(0,1)$ muni de la mesure de Lebesgue.

Pour $n = 1$ on retrouve le D-K-L du pont brownien

$$\mathbf{B}(\rho) = \sum_{k=1}^{\infty} \big\{\frac{1}{k^2\pi^2}\big\}^{1/2} \xi_k \sqrt{2}\sin(k\pi\rho). \tag{3.3.136}$$

Pour $n = 3$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\mathbf{B}\{\rho + \frac{\sin(\pi\rho)}{\pi}\}}{\cos(\frac{\pi\rho}{2})} = \sum_{k=1}^{\infty} \big\{\frac{1}{k(k+1)\pi^2}\big\}^{1/2} \xi_k \big\{\frac{1}{k(2k+2)}\big\}^{1/2} \frac{(k+1)\sin(k\pi\rho) + k\sin\big([k+1]\pi\rho\big)}{\cos(\frac{\pi\rho}{2})}. \tag{3.3.137}$$

Pour $n = 5$,

$$\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \frac{\mathbf{B}\Big\{\rho + \frac{\sin(\pi\rho)}{\pi}\big[1 + \frac{2}{3}\cos^2(\frac{\pi\rho}{2})\big]\Big\}}{\cos^2(\frac{\pi\rho}{2})} = \sum_{k=1}^{\infty} \big\{\frac{1}{k(k+2)\pi^2}\big\}^{1/2} \xi_k \left\{\frac{(4k+4)}{(2k+4)_5}\right\} \cos^3(\frac{\pi\rho}{2}) U''_{k+1}(\sin\frac{\pi\rho}{2}). \tag{3.3.138}$$

Pour $n = 7$,

$$\frac{\sqrt{5}}{4} \frac{\mathbf{B}\Big\{\rho + \frac{\sin(\pi\rho)}{\pi}\big[1 + \frac{2}{3}\cos^2(\frac{\pi\rho}{2}) + \frac{8}{15}\cos^4(\frac{\pi\rho}{2})\big]\Big\}}{\cos^2(\frac{\pi\rho}{2})} = \sum_{k=1}^{\infty} \left\{\frac{1}{k(k+3)\pi^2}\right\}^{1/2} \xi_k \left\{\frac{4k+6}{(2k+6)_7}\right\}^{1/2} \cos^4(\frac{\pi\rho}{2})\, U^{(3)}_{k+2}(\sin\frac{\pi\rho}{2}). \tag{3.3.139}$$

Pour $n = 9$,

$$\frac{\sqrt{35}}{8\sqrt{2}} \frac{\mathbf{B}\Big\{\rho + \frac{\sin(\pi\rho)}{\pi}\big[1 + \frac{2}{3}\cos^2(\frac{\pi\rho}{2}) + \frac{8}{15}\cos^4(\frac{\pi\rho}{2}) + \frac{16}{35}\cos^6(\frac{\pi\rho}{2})\big]\Big\}}{\cos^2(\frac{\pi\rho}{2})} = \sum_{k=1}^{\infty} \big\{\frac{1}{k(k+4)\pi^2}\big\}^{1/2} \xi_k \left\{\frac{(4k+8)}{(2k+8)_9}\right\}^{1/2} \cos^5(\frac{\pi\rho}{2})\, U^{(4)}_{k+3}(\sin\frac{\pi\rho}{2}). \tag{3.3.140}$$

3.3.3 Processus de Wiener sur l'espace projectif réel

Les processus suivants sont similaires aux précédents, obtenus en remplaçant $\mathbf{B}$ par $\mathbf{W}$.

Théorème 3.3.8. *Pour tout entier $n \geq 1$ et $\kappa > 0$, on a sur $(0, \frac{\delta_\kappa}{2})$ muni de la mesure $A_{\kappa,n}$ le D-K-L*

$$\frac{\left(\frac{1}{2}\mathcal{V}_{\kappa,n}\right)^{\frac{1}{2}}}{\mathcal{A}_n} \frac{\mathbf{W}\Big\{2I\big(\frac{n}{2},\frac{n}{2},\frac{1-C_\kappa(r)}{2}\big)\Big\}}{S_\kappa^{n-1}(r)} = \sum_{k=1}^{\infty}\Big\{\frac{1}{\kappa\cdot(2k-1)(2k+n-2)}\Big\}^{1/2}\xi_k\ h_{\kappa,n}(r) \tag{3.3.141}$$

avec

$$h_{\kappa,n}(r) = \Big\{\frac{\kappa(n+4k-3)(n+2k-2)!}{\mathcal{A}_n\,(2k-2)!}\Big\}^{1/2} S_\kappa^{1-\frac{n}{2}}(r) P^{-\frac{n}{2}}_{\frac{n}{2}+2k-2}\big\{C_\kappa(r)\big\}.$$

Sur $(0, \frac{\delta_\kappa}{2})$ muni de la mesure de Lebesgue on a le D-K-L

$$\Big\{\frac{\mathcal{V}_{\kappa,n}}{2\mathcal{A}_n}\Big\}^{1/2}\frac{\mathbf{W}\big\{2I\big(\frac{n}{2},\frac{n}{2},\frac{1-C_\kappa(r)}{2}\big)\big\}}{S_\kappa^{\frac{n-1}{2}}(r)}$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty}\Big\{\frac{1}{\kappa\cdot(2k-1)(2k+n-2)}\Big\}^{1/2}\xi_k\ \Big\{\frac{\kappa(n+4k-3)(n+2k-2)!}{(2k-2)!}\Big\}^{1/2} S_\kappa^{\frac{1}{2}}(r) P^{-n/2}_{\frac{n}{2}+2k-2}\big\{C_\kappa(r)\big\}. \tag{3.3.142}$$

Démonstration. Appliquons la Proposition 3.3.3 p. 82 avec $r_1 = R_1 = 0$ et $r_2 = R_2 = \delta_\kappa/2$. La condition en $r_1 = 0$ implique comme dans les cas précédents que les fonctions propres du D-K-L sont de la forme $f(r) \propto S_\kappa^{1-n/2}(r)P_\nu^{-n/2}\big(C_\kappa(r)\big)$ avec $\Re(\nu) \geq -1/2$ et la condition $(Af)'(\delta_\kappa/2) = 0$. Le fait que $A'_{\kappa,n}(\delta_\kappa/2) = 0$ réduit cette condition à $f'(\delta_\kappa/2) = 0$. Mais

$$f'(r) = (1-\frac{n}{2})S_\kappa^{-\frac{n}{2}}(r)C_\kappa(r)P_\nu^{-\frac{n}{2}}\big(C_\kappa(r)\big) - \kappa S_\kappa^{2-\frac{n}{2}}(r)\big(P_\nu^{-\frac{n}{2}}\big)'\big(C_\kappa(r)\big)$$

et en utilisant la relation $(A.3.28)$ (annexe p. 129) on obtient

$$f'(\frac{\delta_\kappa}{2}) = 0 \iff \big(P_\nu^{-\frac{n}{2}}\big)'(0) = 0 \iff \nu_k = \frac{n}{2} + 2(k-1),\ k = 1,2,...$$

La valeur propre correspondante est telle que

$$\frac{1}{\lambda\kappa} + \frac{n}{2}(\frac{n}{2}-1) = \nu_k(\nu_k+1)$$

soit

$$\lambda_k = \frac{1}{\kappa(\nu_k - \frac{n}{2}+1)(\nu_k+\frac{n}{2})} = \frac{1}{\kappa(2k-1)(2k+n-2)}.$$

La fonction propre normalisée correspondante est d'après la relation $(A.3.19)$ (en y remplaçant k par $(2k-1)$)

$$\Big\{\frac{[n+2(2k-1)-1][n+(2k-1)-1]!}{[(2k-1)-1]!}\Big\}^{1/2}\ P^{-\frac{n}{2}}_{\frac{n}{2}+2k-2}\big\{C_\kappa(r)\big\}$$

et (3.3.141) est démontré. □

Cas d'une dimension impaire : Généralisation du processus de Wiener restreint à $(0,1)$

Théorème 3.3.9. *Pour tout entier impair* $n \geq 1$*, on a pour le processus*

$$\mathbf{W}_{\kappa,n}(r) := \{\frac{\mathcal{V}_{\kappa,n}}{2\mathcal{A}_n}\}^{1/2} \frac{\mathbf{W}\{2I\big(\frac{n}{2},\frac{n}{2},\frac{1-C_\kappa(r)}{2}\big)\}}{S_\kappa^{\frac{n-1}{2}}(r)}, \quad 0 < r < \frac{\delta_\kappa}{2}, \tag{3.3.143}$$

l'expression

$$\mathbf{W}_{\kappa,n}(r) = \{\frac{\pi}{2^n\sqrt{\kappa}}\binom{n-1}{\frac{n-1}{2}}\}^{1/2} \frac{\mathbf{W}\left\{\frac{2\sqrt{\kappa}}{\pi}\big(r - \frac{\sin(2\sqrt{\kappa}r)}{2\sqrt{\kappa}}\sum_{j=2}^{\frac{n+1}{2}}\frac{2^{2j-4}(j-2)!^2}{(2j-3)!}\sin^{2j-4}(\sqrt{\kappa}r)\right\}}{\sin^{\frac{n-1}{2}}(\sqrt{\kappa}r)}, \tag{3.3.144}$$

et le D-K-L sur $(0,\frac{\pi}{2\sqrt{\kappa}})$,

$$\begin{aligned}\mathbf{W}_{\kappa,n}(r) = \sum_{k=1}^{\infty}&\{\frac{1}{\kappa\cdot(2k-1)(2k+n-2)}\}^{1/2}\xi_k\\ &\{\frac{2^n\sqrt{\kappa}(2k-2)!(n+4k-3)}{\pi(n+2k-2)!}\}^{1/2}\big(\frac{n-1}{2}\big)!\sin^{\frac{n+1}{2}}(\sqrt{\kappa}r)G_{2k-2}^{(n+1)/2}\big(\cos(\sqrt{\kappa}r)\big)\\ = \sum_{k=1}^{\infty}&\{\frac{1}{\kappa\cdot(2k-1)(2k+n-2)}\}^{1/2}\xi_k\\ &\{\frac{2\sqrt{\kappa}(2k-2)!(n+4k-3)}{\pi(n+2k-2)!}\}^{1/2}\sin^{\frac{n+1}{2}}(\sqrt{\kappa}r)U_{(n-1)/2+2k-2}^{(\frac{n-1}{2})}\big(\cos(\sqrt{\kappa}r)\big),\end{aligned} \tag{3.3.145}$$

où G_k^m *est le polynôme de Gegenbauer d'ordre* m*, de degré* k *et* U_k *le polynôme de Tchebitcheff de seconde espèce de degré* k*.*

Démonstration. On utilise le théorème précédent. Les relations (3.3.97) et (3.3.98), en remplaçant k par $2k-1$, donnent

$$\begin{aligned}&\{\frac{\kappa(n+4k-3)(n+2k-2)!}{(2k-2)!}\}^{1/2}S_\kappa^{1/2}(r)P_{\frac{n}{2}+2k-2}^{-n/2}\{\cos(\sqrt{\kappa}r)\}\\ &= \{\frac{2^n\sqrt{\kappa}(2k-2)!(n+4k-3)}{\pi(n+2k-2)!}\}^{1/2}\big(\frac{n-1}{2}\big)!\sin^{\frac{n+1}{2}}(\sqrt{\kappa}r)G_{2k-2}^{(n+1)/2}\big(C_\kappa(r)\big)\\ &= \{\frac{2\sqrt{\kappa}(2k-2)!(n+4k-3)}{\pi(n+2k-2)!}\}^{1/2}\sin^{\frac{n+1}{2}}(\sqrt{\kappa}r)U_{(n-1)/2+2k-2}^{(\frac{n-1}{2})}(C_\kappa(r)). \quad \square\end{aligned} \tag{3.3.146}$$

Nous donnons ces développements pour les premières valeurs de n impair et la courbure $\kappa = \pi^2/4$. Tous ces développements sont donc valables sur $(0,1)$ muni de la mesure de

Lebesgue.
Pour $n=1$ on utilise la relation (3.3.99) qui donne

$$\Big\{\frac{(2k-2)!(4k-2)!}{(2k-1)!}\Big\}^{1/2}\sin(\frac{\pi r}{2})\frac{\sin(2k-1)\frac{\pi r}{2}}{\sin(\frac{\pi r}{2})}=\sqrt{2}\sin\big\{(k-\frac{1}{2})\pi r\big\}.$$

Pour $n=3$ on utilise (3.3.100), qui conduit, en remplaçant k par $2k-1$, à

$$U'_{2k-1}(\cos\theta)=\frac{(2k+1)\sin(2k-1)\theta-(2k-1)\sin(2k+1)\theta}{2\sin\theta}.$$

Pour $n=1$ on retrouve donc le D-K-L du processus de Wiener

$$\mathbf{W}(r)=\sum_{k=1}^{\infty}\Big\{\frac{1}{(k-\frac{1}{2})^2\pi^2}\Big\}^{1/2}\xi_k\,\sqrt{2}\sin\big\{(k-\frac{1}{2})\pi r\big\}. \tag{3.3.147}$$

Pour $n=3$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\,\frac{\mathbf{W}\{r-\frac{\sin(\pi r)}{\pi}\}}{\sin(\frac{\pi r}{2})}$$
$$=\sum_{k=1}^{\infty}\Big\{\frac{1}{(k-\frac{1}{2})(k+\frac{1}{2})\pi^2}\Big\}^{1/2}\xi_k\,\Big\{\frac{2}{4k^2-1}\Big\}^{1/2}\frac{(k+\frac{1}{2})\sin\big\{(k-\frac{1}{2})\pi r\big\}-(k-\frac{1}{2})\sin\big\{(k+\frac{1}{2})\pi r\big\}}{\sin(\frac{\pi r}{2})}. \tag{3.3.148}$$

Pour $n=5$,

$$\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\,\frac{\mathbf{W}\Big\{r-\frac{\sin(\pi r)}{\pi}\big[1+\frac{2}{3}\sin^2(\frac{\pi r}{2})\big]\Big\}}{\sin^2(\frac{\pi r}{2})}$$
$$=\sum_{k=1}^{\infty}\Big\{\frac{1}{(k-\frac{1}{2})(k+\frac{3}{2})\pi^2}\Big\}^{1/2}\xi_k\,\Big\{\frac{(4k+2)}{(2k+3)_5}\Big\}\sin^3(\frac{\pi r}{2})U''_{2k}(\cos\frac{\pi r}{2}). \tag{3.3.149}$$

Pour $n=7$,

$$\frac{\sqrt{5}}{4}\,\frac{\mathbf{W}\Big\{r-\frac{\sin(\pi r)}{\pi}\big[1+\frac{2}{3}\sin^2(\frac{\pi r}{2})+\frac{8}{15}\sin^4(\frac{\pi r}{2})\big]\Big\}}{\sin^2(\frac{\pi r}{2})}$$
$$=\sum_{k=1}^{\infty}\Big\{\frac{1}{(k-\frac{1}{2})(k+\frac{5}{2})\pi^2}\Big\}^{1/2}\xi_k\Big\{\frac{(4k+4)}{(2k+5)_7}\Big\}^{1/2}\sin^4(\frac{\pi r}{2})\,U^{(3)}_{2k+1}(\cos\frac{\pi r}{2}). \tag{3.3.150}$$

Pour $n=9$,

$$\frac{\sqrt{35}}{8\sqrt{2}}\,\frac{\mathbf{W}\Big\{r-\frac{\sin(\pi r)}{\pi}\big[1+\frac{2}{3}\sin^2(\frac{\pi r}{2})+\frac{8}{15}\sin^4(\frac{\pi r}{2})+\frac{16}{35}\sin^6(\frac{\pi r}{2})\big]\Big\}}{\sin^2(\frac{\pi r}{2})}$$
$$=\sum_{k=1}^{\infty}\Big\{\frac{1}{(k-\frac{1}{2})(k+\frac{7}{2})\pi^2}\Big\}^{1/2}\xi_k\,\Big\{\frac{(4k+6)}{(2k+7)_9}\Big\}^{1/2}\sin^5(\frac{\pi r}{2})\,U^{(4)}_{2k+2}(\cos\frac{\pi r}{2}). \tag{3.3.151}$$

Cas d'une dimension paire

Théorème 3.3.10. *Soit $\kappa > 0$. Pour tout entier pair $n \geq 2$, on a pour le processus défini sur $(0, \frac{\delta_\kappa}{2})$ par*

$$\mathbf{W}_{\kappa,n}(s) := \frac{2^{\frac{n}{2}-1}(\frac{n}{2}-1)!}{\sqrt{\kappa(n-1)!}} \frac{\mathbf{W}\Big\{2\frac{(n-1)!}{(\frac{n}{2}-1)!^2}(s/2)^{\frac{n}{2}}\sum_{j=0}^{\frac{n}{2}-1}\binom{\frac{n}{2}-1}{j}\frac{(-s/2)^j}{\frac{n}{2}+j}\Big\}}{\big\{s(2-s)\big\}^{\frac{n}{4}}} \tag{3.3.152}$$

le D-K-L

$$\mathbf{W}_{\kappa,n}(s) = \sum_{k=1}^{\infty}\big\{\frac{1}{\kappa\cdot(2k-1)(2k+n-2)}\big\}^{1/2}\xi_k\big\{\frac{(n+4k-3)(n+2k-2)!}{(2k-2)!}\big\}^{1/2}P^{-n/2}_{\frac{n}{2}+2k-2}(1-s). \tag{3.3.153}$$

Démonstration. La démonstration est analogue à celle du Théorème 3.3.6 p. 91, en remplaçant $\mathbf{B}$ par $\mathbf{W}$ et les fonctions $f_{\kappa,n,k}$ par $g_{\kappa,n,k}$. Pour les fonctions propres normalisées, la relation correspondant à (3.3.121) s'écrit

$$\begin{aligned}\tilde{h}_{\kappa,n,k}(t) &= \big\{\frac{A(r)}{\psi'(r)}\big\}^{1/2}\cdot h_{\kappa,n,k}(r)\\ &= \big\{\frac{\mathcal{A}_n}{\kappa}\big\}^{1/2}S_\kappa^{\frac{n}{2}-1}(r)\cdot\big\{\frac{\kappa(n+4k-3)(n+2k-2)!}{\mathcal{A}_n\,(2k-2)!}\big\}^{1/2}S_\kappa^{1-\frac{n}{2}}(r)P^{-\frac{n}{2}}_{\frac{n}{2}+2k-2}\{C_\kappa(r)\}\\ &= \big\{\frac{(n+4k-3)(n+2k-2)!}{(2k-2)!}\big\}^{1/2}P^{-n/2}_{\frac{n}{2}+2k-2}(1-s).\end{aligned} \tag{3.3.154}$$

□

Nous donnons les expressions de ces développements pour les premières valeurs des dimensions paires et $\kappa = 1$. Les développements suivants sont donc valables pour $s \in (0,1)$.
Pour $n = 2$,

$$\frac{\mathbf{W}(s)}{\{s(2-s)\}^{\frac{1}{2}}} = \sum_{k=1}^{\infty}\big\{\frac{1}{(2k-1)(2k)}\big\}^{1/2}\xi_k\big\{(4k-1)(2k)_2\big\}^{1/2}P^{-1}_{2k-1}(1-s). \tag{3.3.155}$$

Pour $n = 4$,

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\frac{\mathbf{W}\{\frac{s^2(3-s)}{2}\}}{s(2-s)} = \sum_{k=1}^{\infty}\big\{\frac{1}{(2k-1)(2k+2)}\big\}^{1/2}\xi_k\big\{(4k+1)(2k+2)_4\big\}^{1/2}P^{-2}_{2k}(1-s). \tag{3.3.156}$$

Pour $n = 6$,

$$\begin{aligned}&\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{15}}\frac{\mathbf{W}\{\frac{s^3(20-15s+3s^2)}{8}\}}{\{s(2-s)\}^{\frac{3}{2}}}\\ &\quad= \sum_{k=1}^{\infty}\big\{\frac{1}{(2k-1)(2k+4)}\big\}^{1/2}\xi_k\big\{(4k+3)(2k+4)_6\big\}^{1/2}P^{-3}_{2k+1}(1-s).\end{aligned} \tag{3.3.157}$$

Pour $n = 8$,

$$\frac{4}{\sqrt{35}} \frac{\mathbf{W}\big\{\frac{s^4(70-84s+35s^2-5s^3)}{16}\big\}}{\{s(2-s)\}^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \Big\{\frac{1}{(2k-1)(2k+6)}\Big\}^{1/2} \xi_k \left\{(4k+5)(2k+6)_8\right\}^{1/2} P_{2k+2}^{-4}(1-s). \tag{3.3.158}$$

Pour $n = 10$,

$$\frac{8\sqrt{2}}{3\sqrt{5}} \frac{\mathbf{W}\big\{\frac{s^5(1008-1680s+1080s^2-315s^3+35s^4)}{128}\big\}}{\{s(2-s)\}^{\frac{5}{2}}} = \sum_{k=1}^{\infty} \Big\{\frac{1}{(2k-1)(2k+8)}\Big\}^{1/2} \xi_k \left\{(4k+7)(2k+8)_{10}\right\}^{1/2} P_{2k+3}^{-5}(1-s). \tag{3.3.159}$$

3.4 Des identités en norme L^2 pour le pont brownien et le processus de Wiener

Proposition 3.4.1. *On a l'égalité en loi*

$$\int_0^1 \mathbf{W}^2\big(\log\frac{1+t}{1-t}\big)dt = 2\int_0^1 \frac{\mathbf{W}^2(t)}{t(2-t)}dt. \tag{3.4.160}$$

Démonstration. Il suffit de comparer les D-K-L (3.3.155) et (3.3.73) p.81 . □

Proposition 3.4.2. *Soit $\kappa > 0$ et $m \in \mathbb{N}$. On a l'égalité en loi*

$$\frac{\mathcal{V}_{\kappa,m+1}}{\mathcal{A}_{m+1}} \int_0^{\frac{\pi}{\sqrt{\kappa}}} \frac{\mathbf{B}^2\big\{I\big(\frac{m+1}{2},\frac{m+1}{2},\frac{1-C_\kappa(r)}{2}\big)\big\}}{S_\kappa^m(r)}\, dr = \frac{\mathcal{V}_{\frac{\kappa}{4},2m+1}}{2\mathcal{A}_{2m+1}} \int_0^{\frac{\pi}{\sqrt{\kappa}}} \frac{\mathbf{B}^2\big\{2I\big(\frac{2m+1}{2},\frac{2m+1}{2},\frac{1-C_{\frac{\kappa}{4}}(r)}{2}\big)\big\}}{S_{\frac{\kappa}{4}}^{2m}(r)}\, dr \tag{3.4.161}$$

Démonstration. Remarquons tout d'abord que pour $\kappa > 0$, on a

$$\frac{\delta_{\frac{\kappa}{4}}}{2} = \frac{\frac{\pi}{\sqrt{\frac{\kappa}{4}}}}{2} = \delta_\kappa.$$

Il suffit ensuite de comparer la relation (3.3.90) p. 86 pour une courbure κ et $n = m+1$, et la relation (3.3.116) p. 91 pour une courbure $\kappa/4$ et $n = 2m+1$. □

Chapitre 4

Étude de divers processus

Dans ce chapitre, nous illustrons une idée qui est une conséquence du Théorème 2.2.1 et de la Proposition 2.2.1. Si un processus gaussien a une fonction de covariance triangulaire $K = K_1K_2$ avec K_1 et K_2 vérifiant l'équation différentielle (2.2.20), les fonctions de son D-K-L vérifieront une équation analogue. Pour le processus de Wiener, $K(s,t) = s.1$ et les deux fonctions $K_1(s) = s$ et $K_2(s) = 1$ vérifient $y'' = 0$, c'est-à-dire qu'elle sont fonctions propres du laplacien qui coïncide sur $\mathbb{R}$ avec la dérivée seconde. Les fonctions du D-K-L sont des fonctions sinus qui vérifient $y'' = \lambda f$ pour un certain λ, donc aussi des fonctions propres du laplacien. Il en va de même pour le pont brownien. Pour le processus d'Anderson-Darling, on a

$$K_1(s) = \big(\frac{s}{1-s}\big)^{1/2},\ K_2(s) = \big(\frac{s}{1-s}\big)^{-1/2},$$

et ces fonctions sont (à un changement de variable affine près) des fonctions de Legendre de première espèce puisque $P_0^{\pm 1}(x)$ vaut à un coefficient près

$$\big(\frac{1+x}{1-x}\big)^{\pm 1/2}.$$

On sait que les fonctions du D-K-L sont des fonctions de Legendre de même indice supérieur. Les résultats de ce chapitre constituent d'autres exemples du même type.

4.1 Fonctions de covariance liées au laplacien en dimension 1

La proposition suivante généralise le cas du pont brownien. En effet si on y prend $\kappa = 0$ et $a = 1$ on retrouve le D-K-L du pont brownien d'après l'égalité en loi $\mathbf{B}(t) = (1-t)\mathbf{W}(t/[1-t])$.

Proposition 4.1.1. *Pour $a > 0$ et $\kappa \leq \pi^2/a^2$, la fonction*

$$K(s,t) = S_\kappa(s)S_\kappa(a-t),\ 0 < s \leq t < a, \tag{4.1.1}$$

est la fonction de covariance du processus gaussien centré

$$S_\kappa(a-t)\mathbf{W}\big\{\frac{S_\kappa(t)}{S_\kappa(a-t)}\big\} = \sum_{k=1}^{\infty} \big\{\frac{S_\kappa(a)}{\big(\frac{k\pi}{a}\big)^2 - \kappa}\big\}^{1/2} \xi_k \ \big(\frac{2}{a}\big)^{1/2} \sin\frac{k\pi t}{a}, \quad 0 < t < a. \tag{4.1.2}$$

Démonstration. Il est clair que le processus du membre de gauche de (4.1.2) a bien K pour covariance. Montrons que le membre de droite est bien son D-K-L. On se place dans un espace de dimension 1 et de courbure constante κ. L'hypothèse faite sur a et κ implique $(0,a) \subseteq (0, \frac{\pi}{\sqrt{\kappa}})$. On est donc dans le cadre du Théorème 2.2.1 p. 51 et de la Proposition 2.2.1 p. 54 avec $K_1(t) = S_\kappa(t)$ et $K_2(t) = S_\kappa(a-t)$ toutes deux solutions de

$$K'' + \kappa K = 0.$$

Or dans un espace de dimension $n = 1$ et de courbure constante, $Y'' = \Delta Y$. Le wronskien de K_1 et K_2 est constant et vaut

$$w = -S_\kappa(t)C_\kappa(a-t) - S_\kappa(t)S_\kappa(a-t) = -S_\kappa(a).$$

La Proposition 2.2.2 p. 54 montre que les fonctions et valeurs propres du D-K-L sont les solutions de

$$y'' + (\kappa + \frac{S_\kappa(a)}{\lambda})y = 0$$

avec les conditions aux limites $y(0) = y(a) = 0$. Quel que soit le signe de $\kappa + S_\kappa(a)/\lambda$, la condition en 0 implique qu'une telle fonction est proportionnelle à un sinus ou un sinus hyperbolique. Mais la condition en a élimine cette deuxième possibilité. Donc on a nécessairement $\kappa + S_\kappa(a)/\lambda > 0$ et

$$f(t) \propto \sin\Big\{t\sqrt{\kappa + \frac{S_\kappa(a)}{\lambda}}\Big\}.$$

La condition $f(a) = 0$ implique alors

$$a\sqrt{\kappa + \frac{S_\kappa(a)}{\lambda}} = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

donc on obtient toutes les valeurs propres et les fonctions propres normalisées avec

$$\lambda_k = \frac{S_\kappa(a)}{\left(\frac{k\pi}{a}\right)^2 - \kappa},\ f_k(t) = \big(\frac{2}{a}\big)^{1/2}\sin\frac{k\pi t}{a}, \quad k \geq 1. \quad \square$$

4.2 Processus liés au laplacien en dimension 2

L'exemple suivant fait intervenir les fonctions comiques de Mehler définies pour $(\mu, p) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R}^*$ par

$$K_p^\mu = P^\mu_{-1/2+ip}$$

Ces fonctions sont donc des cas particuliers des fonctions de Legendre. La proposition A.3.8 rappelle certaines de leurs propriétés, dont on tire aisément

$$\forall x \in (-1,1),\ m > 0,\ p \in \mathbb{R}^*\ :\ K_p^{-m}(x) > 0, \qquad \int_0^1 K_p^{-m}(x)K_p^m(x)dx < \infty,$$

et le tableau de variation

t	0		1
$\frac{K_p^{-m}(1-t)}{K_p^{-m}(t-1)}$	0	$\nearrow$	1

Il est donc tentant de considérer le processus

$$K_p^{-m}\{t-1\}\mathbf{B}\big(\frac{K_p^{-m}(1-t)}{K_p^{-m}(t-1)}\big), \quad 0 < t < 1.$$

Proposition 4.2.1. *Soit m un entier strictement positif et $p \in \mathbb{R}^*$ On a le D-K-L sur $(0,1)$ muni de la mesure de Lebesgue :*

$$K_p^{-m}\{t-1\}\mathbf{B}\big(\frac{K_p^{-m}(1-t)}{K_p^{-m}(t-1)}\big)$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty} \big\{\frac{\cosh(p\pi)\prod_{j=1}^{m}\{p^2+\frac{(2j-1)^2}{4}\}^{-1}}{(m+2k-1/2)^2+p^2}\big\}^{\frac{1}{2}} \xi_k \big\{\frac{(2m+4k-1)(2m+2k-1)!}{(2k-1)!}\big\}^{1/2} P_{m+2k-1}^{-m}(1-t). \tag{4.2.3}$$

Démonstration. Montrons tout d'abord qu'on a le D-K-L sur $(0, \frac{\pi}{2})$ muni de la mesure de densité $A_{1,2}(r) = \mathcal{A}_2 \sin r$,

$$X(r) := K_p^{-m}\{-\cos r\}\mathbf{B}\big(\frac{K_p^{-m}(\cos r)}{K_p^{-m}(-\cos r)}\big)$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty} \big\{\frac{\mathcal{A}_2\cosh(p\pi)\prod_{j=1}^{m}\{p^2+\frac{(2j-1)^2}{4}\}^{-1}}{(m+2k-1/2)^2+p^2}\big\}^{\frac{1}{2}} \xi_k \big\{\frac{(2m+4k-1)(2m+2k-1)!}{\mathcal{A}_2(2k-1)!}\big\}^{1/2} P_{m+2k-1}^{-m}(\cos r)\big\}. \tag{4.2.4}$$

Le processus X a une fonction de covariance triangulaire $K = K_1K_2$ avec

$$K_1(r) = K_p^{-m}(\cos r) \text{ et } K_2(r) = K_p^{-m}(-\cos r) - K_p^{-m}(\cos r).$$

Ces deux fonctions sont solutions de l'équation différentielle $(A.3.7)$ avec $n = -1/2 + ip$ ce qui peut s'écrire, en notant $\Delta_{1,2}$ le laplacien sur la sphère de courbure $\kappa = 1$ et de dimension 2,

$$\Delta_{1,2}K_i(r) + (-p^2 - \frac{1}{4} - \frac{m^2}{\sin^2 r})K_i(r) = 0.$$

La proposition A.3.8 assure que $\int_{(0,\frac{\pi}{2})}\{K_1K_2\sin\} < \infty$, $\lim_0 AK_1K_2 = 0$ et donne la valeur de la constante

$$w_{m,p} := -\mathcal{A}_2 \sin r W_r(K_1, K_2) = -\mathcal{A}_2 \sin r W(K_1, K_2+K_1) = \mathcal{A}_2 \cosh(p\pi) \prod_{j=1}^{m}\{p^2+\frac{(2j-1)^2}{4}\}^{-1}.$$

Donc les couples du D-K-L sont les solutions du système

$$\Delta_{1,2}F(r) + (-p^2 - \frac{1}{4} + \frac{w_{m,p}}{\lambda} - \frac{m^2}{\sin^2 r})F \quad = \quad 0, \tag{4.2.5}$$

$$\text{avec } \begin{cases} \lim_{r\to 0}\sqrt{\sin r}F(r) = 0, \\ \lim_{r\to\pi/2}\sin r W_r(K_2, F)(r) = 0. \end{cases} \tag{4.2.6}$$

De (4.2.5) on déduit que $F(r)$ est solution de $(A.3.7)$ avec

$$n(n+1) = -p^2 - \frac{1}{4} + \frac{w_{m,p}}{\lambda}, \quad \Re(n) \geq -1/2.$$

D'après $(A.3.8)$ (en remarquant que $m \geq 1$ et $\Re(n) \geq -1/2$ impliquent $m+n \neq 0$), il existe deux réels A et B tels que

$$F(r) = AP_n^{-m}(\cos r) + BQ_n^m(\cos r).$$

De la Proposition 2.2.2 on tire les conditions (4.2.6) et de la première de ces conditions on tire $B = 0$ grâce à $(A.3.24)$.
Enfin la deuxième condition dans (4.2.6) s'écrit

$$P_n^{-m}(0)\frac{dP_{-1/2+ip}^{-m}}{dx}(0) = 0$$

donc $P_n^{-m}(0) = 0$ car d'après $(A.3.28)$, on est dans le cas où $\frac{dP_{-1/2+ip}^{-m}}{dx}(0) \neq 0$. Les relations $(A.3.27)$, $(A.3.30)$ et $(A.3.31)$ montrent que les seules valeurs possibles de n sont telles que $n - m = 1, 3...$ Si $n = m + 2k - 1,\ k \in \mathbb{N}^*$, alors $n(n+1) + (p^2 + 1/4) = (m + 2k - 1/2)^2 + p^2$. Enfin, le coefficient de normalisation devant $P_{m+2k-1}^{-m}(\cos r)$ est obtenu grâce à $(A.3.15)$. Donc 4.2.4 est bien vérifié.
Appliquons au processus X la Proposition 2.3.3 p. 62 avec $t = \psi(r) = 1 - \cos r$. On a tout d'abord d'après (3.0.7) p. 72, $A_{1,2}(r) = \mathcal{A}_2 S_1(r) = \mathcal{A}_2 \sin r$ et donc

$$\Big\{\frac{A_{1,2}(r)}{\psi'(r)}\Big\}^{1/2} = \Big\{\frac{\mathcal{A}_2 \sin r}{\sin r}\Big\}^{1/2} = \sqrt{\mathcal{A}_2}.$$

Ainsi avec les notations de la Proposition 2.3.3 on obtient le D-K-L suivant sur $(0,1)$ muni de la mesure de Lebesgue :

$$\begin{aligned}&\sqrt{\mathcal{A}_2}K_p^{-m}\{t-1\}\mathbf{B}\Big(\frac{K_p^{-m}(1-t)}{K_p^{-m}(t-1)}\Big)\\ &= \sum_{k=1}^{\infty}\Big\{\frac{\mathcal{A}_2\cosh(p\pi)\prod_{j=1}^m\{p^2+\frac{(2j-1)^2}{4}\}^{-1}}{(m+2k-1/2)^2+p^2}\Big\}^{\frac{1}{2}}\omega_k\Big\{\Big(\frac{(2m+4k-1)(2m+2k-1)!}{(2k-1)!}\Big)^{1/2}P_{m+2k-1}^{-m}(1-t)\Big\}\end{aligned}$$

qui donne (4.2.3) après simplification par $\sqrt{\mathcal{A}_2}$. $\square$.

Proposition 4.2.2. *Soient μ et ν deux réels tels que*

$$\mu > 0,\ -\frac{1}{2} \leq \nu \leq \mu,\ \mu - \nu \notin \mathbb{N},\ \textit{et } \lceil \nu - \mu \rceil \in 4\mathbb{Z}. \tag{4.2.7}$$

On a le D-K-L sur $(0,1)$ muni de la mesure de Lebesgue

$$\begin{aligned}&\Big\{\frac{2\sin\{(\mu-\nu)\pi\}\Gamma(\nu+\mu+1)}{\pi\Gamma(\nu-\mu+1)}\Big\}^{1/2} P_\nu^{-\mu}(t-1)\mathbf{B}\Big\{\frac{P_\nu^{-\mu}(1-t))}{P_\nu^{-\mu}(t-1)}\Big\}\\ &= \sum_{k=1}^{\infty}\Big\{\frac{1}{(\mu+2k-1-\nu)(\mu+2k+\nu)}\Big\}^{\frac{1}{2}}\xi_k\ \alpha_k P_{\mu+2k-1}^{-\mu}(1-t), \quad 0 < t < 1\end{aligned} \tag{4.2.8}$$

avec $\alpha_k = \{\dfrac{(2\mu+4k-1)(2\mu+2k-1)!}{(2k-1)!}\}^{1/2}$.

Démonstration. Afin d'utiliser le Théorème 2.2.1 du chapitre II, on se place sur la sphère de courbure $\kappa = 1$ et de dimension 2. On a donc $A(r) = A_{1,2}(r) = \mathcal{A}_2 \sin r = 2\pi \sin r$. Montrons alors que le processus du membre de gauche de (4.2.8) est un de ceux du le tableau p. 57, de la forme $(K_1+K_2)B\big(K_1/(K_1+K_2)\big)$. À cet effet posons

$$K_1(r) = P_\nu^{-\mu}(\cos r),\ K_2(r) = P_\nu^{-\mu}(-\cos r) - P_\nu^{-\mu}(\cos r),\ 0 < r < \frac{\pi}{2}.$$

Le fait que $-\mu+\nu \leq 0$ joint à la proposition $A.3.3$ assurent que la fonction $P_\nu^{-\mu}$ n'a pas de zéro sur $(-1,1)$. Elle est donc de signe constant sur cet intervalle. On voit ensuite en utilisant l'équivalent $(A.3.20)$ que $P_\nu^{-\mu}(x)$ est strictement positive au voisinage de $x = 1$. Donc $P_\nu^{-\mu}(x) > 0$ sur $(-1,1)$.
Soit j l'entier tel que $4j = \lceil \nu-\mu \rceil$. On a par définition $4j-1 < \nu-\mu \leq 4j$. On en déduit que $\sin\{\pi(\mu-\nu)\} > 0$. Comme $\mu-\nu > 0$ implique $\Gamma(\mu-\nu) > 0$, on obtient $\Gamma(\nu-\mu+1) > 0$ grâce à la relation $\Gamma(1-z)\Gamma(z) = \pi/\sin(\pi z)$ appliquée à $z = \mu-\nu$. Enfin, on a la relations

$$\sin r W_r\big\{P_\nu^{-\mu}(\cos r); P_\nu^{-\mu}(-\cos r)\big\} = \frac{2\Gamma(\nu-\mu+1)}{\pi\Gamma(\nu+\mu+1)}\sin\{(\nu-\mu)\pi\} < 0 \tag{4.2.9}$$

(voir [?], formule (117) p. 62). On voit donc que la fonction $r \mapsto P_\nu^{-\mu}(-\cos r)/P_\nu^{-\mu}(\cos r)$ est strictement décroissante sur $(0,\frac{\pi}{2})$; comme elle vaut 0 en $r = \pi/2$, on en déduit qu'elle est strictement positive. Il en est de même de K_2, et (4.2.9) implique aussi $W_r(K_1,K_2) < 0$.
De plus ces deux fonctions sont solutions de l'équation différentielle $(A.3.7)$ avec $n = \nu$ et $m = \mu$ qui peut s'écrire sous la forme (3.2.63) avec $n = 2,\ \kappa = 1,\ \alpha = \nu(\nu+1),\ \beta = \mu^2$. Donc (3.2.61) s'écrit dans ce cas, en notant $\Delta_{1,2}$ le laplacien sur la sphère de courbure $\kappa = 1$ et de dimension 2,

$$\Delta_{1,2}K_i(r) + (\nu(\nu+1) - \frac{\mu^2}{\sin^2 r})K_i(r) = 0.$$

D'après la Proposition 2.2.1 les fonctions propres du D-K-L sont donc les solutions de l'équation

$$\begin{cases} \Delta_{1,2}f + (\nu(\nu+1) + \frac{w}{\lambda} - \frac{\mu^2}{\sin^2 r})K_i(r) = 0 \\ \lim_{0,\frac{\pi}{2}} \sqrt{A}f = 0 \end{cases}$$

avec

$$w = -2\pi\,\frac{2\Gamma(\nu-\mu+1)}{\pi\Gamma(\nu+\mu+1)}\sin\{(\nu-\mu)\pi\}$$

d'après (4.2.9). On en déduit en utilisant à nouveau (3.2.61) et (3.2.63) que ces fonctions sont solutions de $(A.3.7)$ avec $n(n+1) = \nu(\nu+1) + \frac{w}{\lambda}$, $\Re(n) \geq -1/2$ et $\mu^2 = m^2$.

La condition en $r=0$ et la Proposition A.3.1 impliquent $f \propto P_n^{-\mu}$. Comme dans la proposition précédente, on montre que n est de la forme $n=\mu+2k-1$ avec $k \geq 1$ entier. On a donc les valeurs propres

$$\lambda_k = \frac{1}{w[(\mu+2k-1)(\mu+2k)-\nu(\nu+1)]}, \quad k=1,2,...$$

et la constante de normalisation devant la fonction $P_{\mu+2k-1}^{-\mu}$ est obtenue grâce à $(A.3.16)$ (en se souvenant que notre mesure a pour densité $2\pi \sin r$). On a donc sur $(0,\frac{\pi}{2})$ muni de la mesure $A_{1,2}(r)=2\pi r \sin r$ le D-K-L

$$\begin{aligned} &P_\nu^{-\mu}(-\cos r)\mathbf{B}\Big(\frac{P_\nu^{-\mu}(\cos r)}{P_\nu^{-\mu}(-\cos r)}\Big) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \Big\{\frac{w}{2\pi(\mu+2k-1-\nu)(\mu+2k+\nu)}\Big\}^{\frac{1}{2}} \xi_k \Big\{\frac{(2\mu+4k-1)(2\mu+2k-1)!}{2\pi(2k-1)!}\Big\}^{1/2} P_{\mu+2k-1}^{-\mu}(\cos r) \end{aligned}$$

On applique à ce D-K-L la Proposition 2.3.3 p. 62 avec pour $r \in (0,\frac{\pi}{2})$, $t=\psi(r)=1-\cos r$ donc $A(r)/\psi'(r)=2\pi$. On obtient donc sur $(0,1)$ muni de la mesure de Lebesgue le D-K-L

$$\begin{aligned} &(2\pi)^{1/2}\, P_\nu^{-\mu}(t-1)\mathbf{B}\Big(\frac{P_\nu^{-\mu}(\cos r)}{P_\nu^{-\mu}(1-t)}\Big) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \Big\{\frac{w}{2\pi(\mu+2k-1-\nu)(\mu+2k+\nu)}\Big\}^{\frac{1}{2}} \xi_k \Big\{\frac{(2\mu+4k-1)(2\mu+2k-1)!}{(2k-1)!}\Big\}^{1/2} P_{\mu+2k-1}^{-\mu}(1-t) \end{aligned}$$

et finalement (4.2.8) après division des deux membres par $w^{1/2}$. □

4.3 Une généralisation du processus d'Anderson-Darling

Multivariate extensions of the Anderson-Darling process

Abstract

We give the explicit Karhunen-Loève expansion of a family of centered Gaussian processes including the Anderson-Darling process. An application is provided through the description of a Cramér-von Mises type test of independence.
Keywords : Anderson-Darling statistic, independence test, Karhunen-Loève expansion, Legendre functions.

4.4 Introduction

4.4.1 The Anderson-Darling process and statistic

Let $Y = Y_1, ..., Y_n$ be independent, identically distributed [i.i.d.] random variables. The goodness of fit test of the null hypothesis that $P(Y \leq y)$ equals a specified continuous distribution function F reduces, via the quantile transform (see e.g. Shorack and Wellner (1986), proposition 4 p.7) to test whether the n independent variables $X_i = F(Y_i)$, $1 \leq i \leq n$, have the uniform distribution on $(0, 1)$. Towards this aim, Anderson and Darling (1952) and (1954) introduced the statistic

$$\mathcal{A}_{1,n}^2 = \int_0^1 \frac{\mathbf{U}_n^2(t)}{t(1-t)} dt \,, \tag{4.4.1}$$

where

$$\mathbf{U}_n(t) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} \{1_{\{X_i \leq t\}} - t\} \,,\ 0 \leq t \leq 1,$$

denotes the uniform empirical process. For the following properties, refer to Shorack and Wellner (1986), chapter 5. Under the null hypothesis, $\mathcal{A}_{1,n}^2$ converges in law toward the random variable

$$\mathcal{A}_1^2 = \int_0^1 \mathbf{Z}_1^2(t) dt \,,$$

with $\{\mathbf{Z}_1(t) : 0 < t < 1\}$ denoting the Anderson-Darling process i.e. a centered Gaussian process with almost surely continuous sample paths and covariance function

$$K_1(s,t) = \frac{\min(s,t) - st}{\sqrt{s(1-s)t(1-t)}} \quad \text{for} \quad 0 < s, t < 1. \tag{4.4.2}$$

In the present paper, we give a generalization of relations $(4.4.4) - (4.4.9)$. They turn out to be a particular case (for $\mu = 1$) of similar results involving a more general centered Gaussian process with covariance function K_μ, given, for each $\mu > 0$, by

$$K_\mu(s,t) = \Big\{ \frac{\min(s,t) - st}{\sqrt{s(1-s)}\sqrt{t(1-t)}} \Big\}^\mu = K_1^\mu(s,t)\,, \quad 0 < s,t < 1\,. \tag{4.4.3}$$

In Theorem 4.5.1 we give a family of centered Gaussian processes with covariance function K_μ and formulas for the eigenfunctions of their K-L expansion, in terms of Legendre functions. For $\mu = m \in \mathbb{N}^*$, the square integrals of these processes will be shown to arise as limits of Cramér-von Mises type statistics generated by appropriate m-dimensional random variables. As a consequence of these results, in Theorems 4.5.2-4.5.3, we derive a family of goodness of fit tests, suitable for testing the independence of a subset of coordinates of an m-dimensional random vector.

Note that a two sample version of the Anderson-Darling statistic is discussed in Pettitt (1976). Recent papers show connexions between some Gaussian processes and special functions, via K-L expansions, leading to interesting statistical applications (see e.g. Henze and Nikitin (2000), or Deheuvels and Martynov (2002)).

The covariance function K_1 can be decomposed into

$$K_1(s,t) = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j f_j(s) f_j(t) \quad \text{for} \quad 0 < s,t < 1\ , \tag{4.4.4}$$

where

$$\lambda_j = \frac{1}{j(j+1)} \text{ and } f_j(t) = 2\sqrt{\frac{2j+1}{j(j+1)}}\,\sqrt{t(1-t)}\,P_j'(2t-1) \text{ for } j = 1, 2, ... \tag{4.4.5}$$

with

$$P_j(x) = \frac{1}{2^j j!}\frac{d^j}{dx^j}(x^2-1)^j$$

denoting the j-th Legendre polynomial (see, e.g. Robin (1957), T.I, formula (35) p.13, or Magnus et al. (1966) p.232). The series in (4.4.4) converges uniformly in every domain interior to the unit square. It yields in turn the *Karhunen-Loève* [K-L] *expansion* of the Gaussian process $\mathbf{Z}_1$. We have, for each $t \in (0,1)$, in L^2,

$$\mathbf{Z}_1(t) = \sum_{j=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_j} f_j(t)\ \omega_j \tag{4.4.6}$$

where $\{\omega_j : j \geq 1\}$ denotes an array of i.i.d. $N(0,1)$ random variables. The functions $\{f_j : j \geq 1\}$ appearing in this expansion fulfill the relations

$$\int_0^1 f_j(s) f_{j'}(s)\ ds \quad = \quad \begin{cases} 1 & \text{if } j = j', \\ 0 & \text{if } j \neq j', \end{cases} \tag{4.4.7}$$

$$\int_0^1 K_1(s,t) f_j(s) ds \quad = \quad \lambda_j f_j(t) \quad \text{for} \quad 0 \leq t \leq 1. \tag{4.4.8}$$

These relations have obvious implications in the statistical treatment of the goodness of fit problem mentioned above. In particular it follows readily from (4.4.6) that the asymptotic distribution of the Anderson-Darling statistic $\mathcal{A}_{1,n}^2$ is that of the random variable $\mathcal{A}_1^2 = \int_0^1 \mathbf{Z}_1^2(t)dt = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \ \omega_j^2$. Thus we obtain, for each $u \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left(e^{iu\mathcal{A}_{1,n}^2}\right) = \mathbb{E}\left(e^{iu\mathcal{A}_1^2}\right) = \prod_{j=1}^{\infty}\left(1 - \frac{2iu}{j(j+1)}\right)^{-\frac{1}{2}}. \tag{4.4.9}$$

This relation provides, for large n, a reasonable approximation to the null distribution of the test statistic $\mathcal{A}_{1,n}^2$, whose distribution becomes close to that of $\mathcal{A}_1^2$ for large n.

4.4.2 The null hypothesis

Let $(X_n(1), ..., X_n(m))$, $n = 1, 2, ...$ denote a sequence of i.i.d. random vectors, taking values in $\mathbb{R}^m$, with continuous distribution function (df) $F(x_1, ..., x_m)$, and marginal df's $F^{(1)}(x_1), ..., F^{(m)}(x_m)$. For $I = \{i_1, ..., i_k\}$, a subset of $\{1, ..., m\}$ with $\sharp I \geq 2$, we seek to test independence of $X_n(i_1), \ \dots, \ X_n(i_k)$. In other words, we seek to test the null hypothesis

$$H_0(I) \ : \quad F(1, ..., 1, x_{i_1}, 1, ..., 1, x_{i_k}, 1, ..., 1) = F_I(x_{i_1}, ..., x_{i_k}) = \prod_{j=1}^{k} F^{(i_j)}(x_{i_j}),$$

against the alternative corresponding to an arbitrary F_I.

For the statement of our results, we need the following definitions and facts.

4.4.3 The dependence function of a multivariate random variable

A *dependence function* or *copula* of F is any continuous df D of a probability measure on $[0, 1]^m$, with uniform marginals, and fulfilling

$$D(F^{(1)}(x_1), ..., F^{(m)}(x_m)) = F(x_1, ..., x_m),$$

whenever x_i is a continuity point of $F^{(i)}$ for $i = 1, ..., m$ (refer to Deheuvels (1981) for details). For continuous marginals, the existence and unicity of D is well known. Let D_n be a dependence function of the empirical df F_n. D_n is uniquely defined on $I_n = \{(\frac{k_1}{n}, ..., \frac{k_m}{n}) \ : \ 0 \leq k_j \leq n\}$ via

$$D_n(\frac{k_1}{n}, ..., \frac{k_m}{n}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{m} 1_{\{F_n^{(j)}(X_i(j)) \leq \frac{k_j}{n}\}},$$

where $F_n^{(1)}, ..., F_n^{(m)}$ are the empirical marginal df associated to the sample. On the other hand D_n is not uniquely defined on $[0, 1]^m$. Deheuvels (1981) provides a construction of an empirical process $\Delta_{I,n}(\mathbf{t})$ for each finite subset $I \subseteq \{1, ..., m\}$, $\sharp I \geq 2$, with

$\mathbf{t} \in [0,1]^m$. The latter depends only upon D_n, and is appropriate for testing the independence of the random variables $(X(i_1), ..., X(i_k))$, with $I = \{i_1, ..., i_k\}$, against the alternative. This is done as follows.

For $\mathbf{t} = (t_1, ..., t_m) \in [0,1]^m$ and $1 \leq i < j \leq m$, we set

$$\Delta_{i,j,n}(\mathbf{t}) = D_n(1, ..., t_i, ..., t_j, ..., 1) - t_i t_j \ ,$$

and by induction, for $1 \leq i_1 < i_2 < ... < i_k \leq m$:

$$\begin{aligned}\Delta_{i_1,...,i_k,n}(\mathbf{t}) = D_n(1, ..., t_{i_1}, ..., t_{i_k}, ..., 1) - t_{i_1}...t_{i_k} \\ - \sum_{j=1}^{k} t_{i_j} \Delta_{i_1,...,i_{j-1},i_{j+1},...,i_k,n}(t_{i_1}, ..., t_{i_{j-1}}, t_{i_{j+1}}, ..., t_{i_k}).\end{aligned}$$

When $I = \{i_1, ..., i_k\}$, with $1 \leq i_1 < i_2 < ... < i_k \leq m$, we set

$$\Delta_{m,I,n}(\mathbf{t}) = \Delta_{i_1,...,i_k,n}(t_{i_1}, ..., t_{i_k}).$$

The limiting process of $\sqrt{n}\ \Delta_{m,I,n}$ is a centered Gaussian process $X_{m,I}$ with covariance function given by

$$\mathbb{E}X_{m,I}(\mathbf{s})X_{m,I}(\mathbf{t}) = \prod_{i=1}^{m} (\min(s_i, t_i) - s_i t_i)\,. \tag{4.4.10}$$

4.5 Statement of main results

4.5.1 A family of Karhunen-Loève expansions

We will need for the statement of our results some notations and facts taken from the theory of special functions.

Legendre functions are solutions of the Legendre associated differential equation

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' - \frac{\mu^2}{1 - x^2}\ y = -\nu(\nu + 1)y, \tag{4.5.1}$$

where μ, ν, are two arbitrary complex numbers. When the variable x is real and between -1 and +1, a solution to (4.5.1) is provided by the Legendre function of the first kind denoted by P_ν^μ (with $P_\nu^0 = P_\nu$, and for $n \in \mathbb{N}$, P_n^0 being the Legendre polynomial P_n). It can be defined (see e.g. Robin (1959), T. II formula (91) p.52 or Magnus et al. (1966) pp. 166 and 174) via the formulas

$$\begin{aligned}P_\nu^\mu(x) &= \Gamma(1-\mu)^{-1}(\frac{1+x}{1-x})^{\frac{\mu}{2}} F(-\nu, 1+\nu; 1-\mu; \frac{1-x}{2}) \quad \text{for} \quad \mu \neq 1, 2, 3...,\\ P_\nu^m(x) &= (-1)^m(1-x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m}{dx^m} P_\nu(x) \quad \text{for} \quad m = 1, 2, 3...,\end{aligned} \tag{4.5.2}$$

where F denotes the hypergeometric function

$$F(a,b;c,z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_n(b)_n}{(c)_n}\frac{z^n}{n!}, \tag{4.5.3}$$

and $(x)_n = x(x+1)...(x+n-1)$ the Pochhammer's symbol. In the particular case where $\nu=\mu,\mu+1,\mu+2...$, the functions $P_\nu^{-\mu}$ fulfill (see Robin (1959) T. II formula (359)p.184), for $x\in(-1,1)$ and $k\in\mathbb{N}$, the relations

$$P_{\mu+k}^{-\mu}(x) \quad = \quad \frac{(-1)^k}{2^{\mu+k}\Gamma(\mu+k+1)}(1-x^2)^{-\frac{\mu}{2}}\frac{d^k}{dx^k}(1-x^2)^{\mu+k}. \tag{4.5.4}$$

Furthermore, the functions $\{P_{\mu+k}^{-\mu}: k\geq 0\}$ fulfill the orthogonality relations (see Robin (1959) T. II formula (357)p.183), for $k,l\geq 0$,

$$\int_{-1}^{1}P_{\mu+k}^{-\mu}(x)P_{\mu+l}^{-\mu}(x)dx \quad = \quad 0 \quad \text{when} \quad k\neq l, \tag{4.5.5}$$

$$= \quad \frac{2k!}{(2\mu+2k+1)\Gamma(2\mu+k+1)} \quad \text{when} \quad k=l. \tag{4.5.6}$$

When $\mu=m$ is a positive integer, we have (see Robin (1959) T. I, formula (12) p.70), for each integer $n\geq m$,

$$P_n^{-m}=(-1)^m\frac{(n-m)!}{(n+m)!}P_n^m. \tag{4.5.7}$$

For $\alpha\in(0,\frac{1}{2})$, we set for convenience $T_\alpha=[\alpha,1-\alpha]$.

Théorème 4.5.1. *1) For each $\mu>0$, there exists a centered Gaussian process $\mathbf{Z}_\mu$ on $(0,1)$ with a.s. continuous sample paths and covariance function K_μ.*

2) The following Karhunen-Loève expansion holds. We have, almost surely and uniformly on T_α for each specified $0<\alpha<1$ and $s,t\in T_\alpha$,

$$\mathbf{Z}_\mu(t) \quad = \quad \sum_{j=1}^{\infty}\sqrt{\lambda_{\mu,j}}\ \omega_{\mu,j}f_{\mu,j}(t), \tag{4.5.8}$$

and uniformly on $T_\alpha\times T_\alpha$,

$$K_\mu(s,t) \quad = \quad \sum_{j=1}^{\infty}\lambda_{\mu,j}f_{\mu,j}(s)f_{\mu,j}(t). \tag{4.5.9}$$

Here for each μ, $\{\omega_{\mu,j}:j\geq 1\}$ denotes an array of i.i.d. $N(0,1)$ random variables, and for $j\geq 1$,

$$f_{\mu,j}(t) \quad = \quad \sqrt{\frac{(2\mu+2j-1)\Gamma(2\mu+j)}{(j-1)!}}P_{\mu+j-1}^{-\mu}(2t-1), \tag{4.5.10}$$

$$\lambda_{\mu,j} \quad = \quad \frac{\mu}{(\mu+j-1)(\mu+j)}. \tag{4.5.11}$$

Moreover, the above functions fulfill, for all $j, j' \geq 1$, $t \in [0,1]$,

$$\int_0^1 K_\mu(s,t) f_{\mu,j}(s)\ ds \quad = \quad \lambda_{\mu,j} f_{\mu,j}(t), \tag{4.5.12}$$

and

$$\int_0^1 f_{\mu,j}(s) f_{\mu,j'}(s)\ ds \quad = \quad \begin{cases} 1 & \text{if } j = j', \\ 0 & \text{if } j \neq j'. \end{cases} \tag{4.5.13}$$

Remark In the case $\mu = 1$, relations (4.5.11) and (4.4.5) clearly give the same eigenvalue for each $j \geq 1$. As for the eigenfunction in (4.4.5), it can be obtained from (4.5.10) in the following way. Relations (4.5.2) and (4.5.7) imply, for $j \geq 1$ and $x \in (0,1)$,

$$P_j^{-1}(x) = -\frac{P_j^1(x)}{j(j+1)} = \frac{(1-x^2)^{1/2} P_j'(x)}{j(j+1)}. \tag{4.5.14}$$

Thus for $\mu = 1$, (4.5.10) becomes,

$$\begin{aligned} f_{1,j}(t) &= \sqrt{\frac{(2j+1)(j+1)!}{(j-1)!}}\, P_j^{-1}(2t-1) \\ &= \sqrt{(2j+1)j(j+1)}\, \frac{\{1-(2t-1)^2\}^{1/2} P_j'(2t-1)}{j(j+1)} \\ &= 2\sqrt{\frac{2j+1}{j(j+1)}} \sqrt{t(1-t)} P_1'(2t-1) \end{aligned}$$

and we obtain the same function as in (4.4.5).

4.5.2 Statistical applications

The case $m = 2$

We study here the special case of a sample (X_i, Y_i), $i = 1, ..., n$ from a bivariate random vector (X, Y).

Definition 4.5.1. *Let D_n denote for each n a version of the empirical dependence function. Set, for $n \geq 1$,*

$$\mathbf{Z}_{2,n}(t) \quad = \quad \sqrt{n}\, \frac{D_n(t,t) - t^2}{t(1-t)} \quad , \quad 0 < t < 1, \tag{4.5.15}$$

$$\mathcal{A}_{2,n}^2 \quad = \quad n \int_0^1 \frac{\left(D_n(t,t) - t^2\right)^2}{t^2(1-t)^2}\ dt. \tag{4.5.16}$$

Théorème 4.5.2. *Under $H_0(I)$ one has the convergence in law*

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{A}_{2,n}^2 = \int_0^1 \mathbf{Z}_2^2(t)dt\,, \tag{4.5.17}$$

where $\mathbf{Z}_2$ is a centered Gaussian process with covariance function K_2. Moreover, we have for each $u \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(e^{iu\mathcal{A}_{2,n}^2}) = \prod_{j=2}^{\infty}\Big(1 - \frac{4iu}{j(j+1)}\Big)^{-\frac{1}{2}}. \tag{4.5.18}$$

The case $m \geq 3$

Definition 4.5.2. *Set, for $n \geq 1$ and $m \geq 3$,*

$$\delta_{m,I,n}(t) = \Delta_{m,I,n}(t,...,t)\ ,\ 0<t<1, \tag{4.5.19}$$

$$\mathbf{Z}_{m,I,n}(t) = \sqrt{n}\ \frac{\delta_{m,I,n}(t)}{[t(1-t)]^{\frac{m}{2}}}, \tag{4.5.20}$$

$$\mathcal{A}_{m,n}^2(I) = n\int_0^1 \frac{\delta_{m,I,n}^2(t)}{[t(1-t)]^m}\ dt. \tag{4.5.21}$$

Théorème 4.5.3. *Under $H_0(I)$, one has the convergence in law*

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{A}_{m,n}^2(I) = \int_0^1 \mathbf{Z}_m^2(t)dt\,, \tag{4.5.22}$$

where $\mathbf{Z}_m$ is a centered Gaussian process with covariance function K_m. Moreover, we have for each $u \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(e^{iu\mathcal{A}_{m,n}^2(I)}) = \prod_{j=m}^{\infty}\Big(1 - \frac{2miu}{j(j+1)}\Big)^{-\frac{1}{2}}. \tag{4.5.23}$$

4.6 Proofs

4.6.1 Proof of Theorem 4.5.1

Let $\mathbf{W}$ denote the restriction to $[0,1]$ of a standard Wiener process, i.e. a centered Gaussian process with almost surely continuous sample paths and covariance function $\mathbb{E}W(s)W(t) = \min(s,t)$ for $0 \leq s,t \leq 1$. For each $\mu > 0$, the process

$$\mathbf{Z}_\mu(t) = \big(\frac{1-t}{t}\big)^{\mu/2}\, \mathbf{W}\big\{\big(\frac{t}{1-t}\big)^{\mu}\big\}\,, \quad 0<t<1, \tag{4.6.1}$$

is clearly centered, Gaussian, with almost surely continuous sample paths. Since the function $s \mapsto s/(1-s)$ is increasing on $(0,1)$, the covariance function of $\mathbf{Z}_\mu$ is given, for $0 < s \le t < 1$, by

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\mathbf{Z}_\mu(s)\mathbf{Z}_\mu(t) &= \big(\frac{1-s}{s}\big)^{\mu/2}\big(\frac{1-t}{t}\big)^{\mu/2}\big(\frac{s}{1-s}\big)^{\mu} \\ &= \big(\frac{s}{1-s}\big)^{\mu/2}\big(\frac{1-t}{t}\big)^{\mu/2} = \Big(\frac{s(1-t)}{\sqrt{s(1-s)}\sqrt{t(1-t)}}\Big)^{\mu} = K_\mu(s,t).\end{aligned}$$

In order to prove relations (4.5.8)-(4.5.11) it suffices to show that the hypotheses of Theorem 5.2.2 in Shorack and Wellner (1986) p. 210 are satisfied. We have thus to prove, for each $\mu > 0$,

- (a) $\int\limits_0^1 K_\mu(t,t)dt < \infty$ and $P(\int_0^1 \mathbf{Z}_\mu^2(t)dt < \infty) = 1$;
- (b) $\{(\lambda_{\mu,j}, f_{\mu,j}) \ : \ j \ge 1\}$ is a set of solutions of the Fredholm-type integral equation in (λ, f) :

$$\int_0^1 K_\mu(s,t)f(s)\ ds = \lambda f(t) \text{ for } t \in (0,1),$$

  such that the set $\{\lambda_{\mu,j} \ : \ j \ge 1\}$ comprises the entire spectrum of the integral opeartor $A_\mu : f \mapsto \int_0^1 K(s,.)f(s)ds$, and the set $\{f_{\mu,j} : j \ge 1\}$ is a complete othonormal system in $L^2(0,1)$;
- (c) $K_\mu(s,t) = \sum\limits_{j=1}^{\infty} \lambda_{\mu,j} f_{\mu,j}(s) f_{\mu,j}(t)$ for $0 < s,t < 1$.

We observe that the first assertion in (a) is obvious since $K_\mu(t,t) = 1$ for each $\mu > 0$, and implies in turn the second one by Fubini's theorem applied to the continuous positive function $t \mapsto \mathbf{Z}_\mu^2(t)$ on $(0,1)$. In order to prove (b), we introduce the following notations. Since

$$\iint_{(0,1)^2} K_\mu^2(s,t)dsdt \le \iint_{(0,1)^2} K_\mu(s,s)K_\mu(t,t)dsdt = \Big\{\int_0^1 K_\mu(t,t)dt\Big\}^2 < \infty\,,$$

A_μ is well defined on $L^2(0,1)$. We first establish that if $f \in L^2(0,1)$ is an eigenfunction of A_μ corresponding to the eigenvalue λ, then $\lambda \ne 0$ and f is a solution on $(0,1)$ of the differential equation

$$t(1-t)y'' - (2t-1)y' - \frac{\mu^2}{4t(1-t)}y = -\frac{\mu}{\lambda}y. \tag{4.6.2}$$

For simplicity, it is convenient to introduce the functions

$$h_r(t) = \left(\frac{t}{1-t}\right)^r \quad , \quad t \in (0,1), \tag{4.6.3}$$

where r is a real number. Obviously, for $t \in (0,1)$ and $(r,r') \in \mathbb{R}^2$,

$$h_r.h_{r'} = h_{r+r'} \quad , \quad h'_r(t) = \frac{r}{t(1-t)} h_r(t) \quad \text{and} \quad h_0(t) = 1. \tag{4.6.4}$$

It is readily checked that

$$K_\mu(s,t) = h_{\frac{\mu}{2}}(s).h_{-\frac{\mu}{2}}(t) \quad \text{for} \quad 0 < s \le t < 1,$$

which allows us to write, for $f \in L^2(0,1)$ and $t \in (0,1)$,

$$A_\mu[f](t) \quad = \quad h_{-\frac{\mu}{2}}(t) \int_0^t h_{\frac{\mu}{2}}(s) f(s) ds + h_{\frac{\mu}{2}}(t) \int_t^1 h_{-\frac{\mu}{2}}(s) f(s) ds. \tag{4.6.5}$$

From this equality we infer that if there exists a real number λ such that $A_\mu[f] = \lambda f$, then f is infinitely differentiable on $(0,1)$. In this case, after differentiation and making use of (4.6.4) we obtain, after simplification,

$$2\lambda t(1-t) f'(t) = -\mu h_{-\frac{\mu}{2}}(t) \int_0^t h_{\frac{\mu}{2}}(s) f(s) ds + \mu h_{\frac{\mu}{2}}(t) \int_t^1 h_{-\frac{\mu}{2}}(s) f(s) ds.$$

Differentiating again both sides yields

$$\begin{aligned}
&2\lambda\{t(1-t)f''(t) - (2t-1)f'(t)\} \\
&= \frac{\mu^2}{2t(1-t)} \left(h_{-\frac{\mu}{2}}(t) \int_0^t h_{\frac{\mu}{2}}(s) f(s) ds + h_{\frac{\mu}{2}}(t) \int_t^1 h_{-\frac{\mu}{2}}(s) f(s) ds \right) \\
&\quad -2\mu f(t) \\
&= \frac{\mu^2}{2t(1-t)} A_\mu[f](t) - 2\mu f(t) = \frac{\mu^2}{2t(1-t)} \lambda f(t) - 2\mu f(t).
\end{aligned}$$

This equality implies that necessarily $\lambda \neq 0$ (otherwise, one would have $f = 0$, which is excluded here), and (4.6.2) is established. Conversely, let (f,λ) be a solution of (4.6.2). In view of (4.6.5) we have

$$A_\mu[-\frac{\mu}{\lambda} f](t) \quad = \quad h_{-\frac{\mu}{2}}(t) \int_0^t h_{\frac{\mu}{2}}(s) \{-\frac{\mu}{\lambda} f(s)\} ds + h_{\frac{\mu}{2}}(t) \int_t^1 h_{-\frac{\mu}{2}}(s) \{-\frac{\mu}{\lambda} f(s)\} ds.$$

Let $0 < a < t < b < 1$. We have on the first hand,

$$\begin{aligned}
&\int_a^t \left\{ h_{\frac{\mu}{2}}(s) \frac{d}{ds}\left[s(1-s)f'(s)\right] - h_{\frac{\mu}{2}}(s) \frac{\mu^2 f(s)}{4s(1-s)} \right\} ds \\
&= \int_a^t \left\{ h_{\frac{\mu}{2}}(s) \frac{d}{ds}\left[s(1-s)f'(s)\right] - \frac{\mu}{2} h'_{\frac{\mu}{2}}(s) f(s) \right\} ds \\
&= \left[h_{\frac{\mu}{2}}(s) s(1-s) f'(s) - \frac{\mu}{2} h_{\frac{\mu}{2}}(s) f(s) \right]_a^t \\
&\quad - \int_a^t \left\{ h'_{\frac{\mu}{2}}(s) s(1-s) f'(s) - \frac{\mu}{2} h_{\frac{\mu}{2}}(s) f'(s) \right\} ds \\
&= \left[h_{\frac{\mu}{2}}(s) s(1-s) f'(s) - \frac{\mu}{2} h_{\frac{\mu}{2}}(s) f(s) \right]_a^t,
\end{aligned}$$

whereas, on the other hand,

$$\begin{aligned}
&\int_t^b \left\{ h_{-\frac{\mu}{2}}(s)\frac{d}{ds}\left[s(1-s)f'(s)\right] - h_{-\frac{\mu}{2}}(s)\frac{\mu^2 f(s)}{4s(1-s)} \right\} ds \\
= &\int_t^b \left\{ h_{-\frac{\mu}{2}}(s)\frac{d}{ds}\left[s(1-s)f'(s)\right] + \frac{\mu}{2}h'_{-\frac{\mu}{2}}(s)f(s) \right\} ds \\
= &\left[h_{-\frac{\mu}{2}}(s)s(1-s)f'(s) + \frac{\mu}{2}h_{-\frac{\mu}{2}}(s)f(s) \right]_t^b \\
&-\int_t^b \left\{ h'_{-\frac{\mu}{2}}(s)s(1-s)f'(s) + \frac{\mu}{2}h_{-\frac{\mu}{2}}(s)f'(s) \right\} ds \\
= &\left[h_{-\frac{\mu}{2}}(s)s(1-s)f'(s) + \frac{\mu}{2}h_{-\frac{\mu}{2}}(s)f(s) \right]_t^b .
\end{aligned}$$

These two results imply, in turn, that

$$\begin{aligned}
-\frac{\mu}{\lambda}\int_a^b K_\mu(s,t)f(s)ds \quad = \quad & -\mu f(t) + h_{\frac{\mu}{2}}(t)h_{-\frac{\mu}{2}}(b)\left(b(1-b)f'(b) + \frac{\mu}{2}f(b)\right) \\
& -h_{-\frac{\mu}{2}}(t)h_{\frac{\mu}{2}}(a)\left(a(1-a)f'(a) - \frac{\mu}{2}f(a)\right)
\end{aligned}$$

and finally

$$\begin{aligned}
\int_a^b K_\mu(s,t)f(s)ds - \lambda f(t) \quad = \quad & \frac{\lambda}{\mu}h_{-\frac{\mu}{2}}(t)h_{\frac{\mu}{2}}(a)\left(a(1-a)f'(a) - \frac{\mu}{2}f(a)\right) \\
& -\frac{\lambda}{\mu}h_{\frac{\mu}{2}}(t)h_{-\frac{\mu}{2}}(b)\left(b(1-b)f'(b) + \frac{\mu}{2}f(b)\right).
\end{aligned}$$

Thus we have established that $A_\mu[f] = \lambda f$ if and only if f is a solution of (4.6.2) on $(0,1)$ and verifies the limit conditions

$$\lim_{a\to 0} a^{\frac{\mu}{2}}\left(a(1-a)f'(a) - \frac{\mu}{2}f(a)\right) = 0 \tag{4.6.6}$$

and

$$\lim_{b\to 1}(1-b)^{\frac{\mu}{2}}\left(b(1-b)f'(b) + \frac{\mu}{2}f(b)\right) = 0. \tag{4.6.7}$$

Let ν be a complex number such that

$$\nu(\nu+1) = \mu/\lambda, \tag{4.6.8}$$

and F be defined on $(-1,1)$ from f by the change of variable $x = 2t-1$ via the formula

$$F(x) = f(\frac{x+1}{2}) = f(t). \tag{4.6.9}$$

If we make in (4.6.2) the substitutions $2t-1 = x$, $4t(1-t) = 1-x^2$, $F(x) = f((1+x)/2)$, $2F'(x) = f'((1+x)/2)$ and $4F''(x) = f''((1+x)/2)$, it becomes

$$(1-x^2)F''(x) - 2xF'(x) - \frac{\mu^2}{1-x^2}F(x) = \nu(\nu+1)F(x).$$

Thus, if F and ν are defined as in (4.6.8) and (4.6.9), to obtain (f,λ) solution of (4.6.2) is equivalent to derive a solution F of the Legendre associated differential equation on $(0,1)$

$$(1-x^2)Y'' - 2xY' - \frac{\mu^2}{1-x^2}Y = -\nu(\nu+1)Y, \tag{4.6.10}$$

verifying the conditions

$$\lim_{x\to -1}(1+x)^{\frac{\mu}{2}}\left((1-x^2)F'(x) - \mu F(x)\right) = 0, \tag{4.6.11}$$

and

$$\lim_{x\to 1}(1-x)^{\frac{\mu}{2}}\left((1-x^2)F'(x) + \mu F(x)\right) = 0. \tag{4.6.12}$$

We prove now that for each integer $k \geq 0$, the function $P^{-\mu}_{\mu+k}(2t-1)$ is an eigenfunction of A_μ. On the first hand, by definition of $P^{-\mu}_{\mu+k}$, (4.6.10) holds for $F(x) = P^{-\mu}_{\mu+k}(x)$ and $\nu = \mu + k$, corresponding to $\lambda = \mu/((\mu+k)(\mu+k+1))$. On the other hand, relation (4.5.4) entails for each $k \in \mathbb{N}$

$$\lim_{x\to 1} P^{-\mu}_{\mu+k}(x) = \lim_{x\to -1} P^{-\mu}_{\mu+k}(x) = 0. \tag{4.6.13}$$

Furthermore, the equality (true in fact for each complex number k, see e.g. Magnus et al. (1966) p.171)

$$(1-x^2)\frac{dP^{-\mu}_{\mu+k}}{dx}(x) = (\mu+k+1)xP^{-\mu}_{\mu+k}(x) - (2\mu+k+1)P^{-\mu}_{\mu+k+1}(x), \tag{4.6.14}$$

when combined with (4.6.13) implies, for each $k \in \mathbb{N}$,

$$\lim_{x\to -1}(1-x^2)\frac{dP^{-\mu}_{\mu+k}}{dx}(x) = \lim_{x\to 1}(1-x^2)\frac{dP^{-\mu}_{\mu+k}}{dx}(x) = 0.$$

From this we conclude that (4.6.11) and (4.6.12) are fulfilled. Setting $j = k-1$, it is thus established that for each $j \in \mathbb{N}^*$, $P^{-\mu}_{\mu+j-1}(2t-1)$ is an eigenfunction of A_μ corresponding to the eigenvalue $\mu/((\mu+j-1)(\mu+j))$. There is no other eigenvalue for the following reason. If we let $\lambda_1, \lambda_2, ...$ be an enumeration of the eigenvalues of A_μ with each one appearing as many times as its multiplicity, then (see e.g. Shorack and Wellner (1986) p.213) $\int_0^1 K_\mu(t,t)dt = \sum_{j=1}^\infty \lambda_j$. But on the first hand $\int_0^1 K_\mu(t,t)dt = 1 = \sum_{j=1}^\infty \frac{\mu}{(\mu+j-1)(\mu+j)}$, and on the other hand, A_μ has only positive eigenvalues (see Shorack and Wellner (1986), proposition 5.2.2 p. 208). Furthermore we have shown that an eigenvalue cannnot be equal to zero. Thus the list of eigenvalues $\{\mu/((\mu+j-1)(\mu+j)) : k \geq 1\}$ we already found is necessarily complete. Since the operator A_μ is a Hilbert-Schmidt operator, the set of eigenfunctions $\{f_{\mu,j} : j \geq 1\}$ is complete in $L^2(0,1)$. Its orthonormality follows readily from relations (4.5.5) – (4.5.6). This completes the proof of (b).

We cannot use Mercer's theorem in order to prove (c) because K_m is not continuous on $[0,1]$, but the proof given in the case $\mu = 1$ in Anderson and Darling (1952) p. 198 (see in particular the paragraph following relation (4.6))is based on a theorem that can be used in fact for each $K_\mu, \mu > 0$. The a.s. uniform convergence in (4.5.8) is a consequence of Theorems 3.7, 3.8 and 3.15 in Adler (1990). Even though these results are devised to hold for continuous covariance functions and rely on Mercer's theorem, their proof can be repeted here by using (c), the latter being an extension of Mercer's theorem appropriate for our needs.

4.6.2 Proof of Theorems 2.2 and 2.3

In order to simplify notations, we restrict ourselves to the case $m \geq 3$. The proof would be the same for $m = 2$. The process $\sqrt{n}\,\delta_{m,I,n} = \{\ (t(1-t))^{\frac{m}{2}}\mathbf{Z}_{m,n}(t) : t \in (0,1)\}$ turns out to be the restriction of $\sqrt{n}\,\Delta_{m,I,n} = X_{m,I,n}$ to the diagonal of $(0,1)^m$. From the weak convegence of $X_{m,I,n}$ toward $X_{m,I}$ we infer the existence of two processes $X^*_{m,I,n}$ and $X^*_{m,I}$ respectively equivalent to $X_{m,I,n}$ and $X_{m,I}$, and such that

$$\lim_{n\to\infty} ||X^*_{m,I,n} - X^*_{m,I}|| = 0 \ a.s.$$

where $||.||$ denotes the uniform norm on the space of continuous functions defined on $[0,1]^m$ (see e.g. Theorem 2.3.4 p.47 in Shorack and Wellner (1986) for details). Let $Y^*_{m,I,n}$ and $Y^*_{m,I}$ denote the respective restrictions of $X^*_{m,I,n}$ and $X^*_{m,I}$ to the diagonal of $[0,1]^m$. Note first that processes $\mathbf{Z}_{m,I,n}$ and $\mathbf{Z}_{m,I}$ are equivalent to $Y^*_{m,I,n}/\{t(1-t)\}^{m/2}$ and $Y^*_{m,I}/\{t(1-t)\}^{m/2}$ respectively. Moreover, we have the equalities, in law,

$$\int_0^1 \mathbf{Z}^2_{m,I,n}(t)dt = \int_0^1 \frac{Y^*_{m,I,n}(t)^2}{\{t(1-t)\}^m}dt\ ,\ \int_0^1 \mathbf{Z}^2_{m,I}(t)dt = \int_0^1 \frac{Y^*_{m,I}(t)^2}{\{t(1-t)\}^m}\,dt\,. \tag{4.6.15}$$

Following the proof of Theorem 11.6.1 p. 471 (substituting $Y^*_{m,I,n}$, $Y^*_{m,I}$ and $1/\{t(1-t)\}^m$ to $\mathbb{W}_n$, $\mathbb{W}$ and $\psi(t)$ respectively) from Shorack and Wellner (1986), we obtain the convergence in probability

$$\int_0^1 \frac{(Y^*_{m,I,n} - Y^*_{m,I})^2(t)}{\{t(1-t)\}^m} \to 0.$$

wich implies in turn the convergence in law

$$\int_0^1 \frac{Y^*_{m,I,n}(t)^2}{\{t(1-t)\}^m} \to \int_0^1 \frac{Y^*_{m,I}(t)^2}{\{t(1-t)\}^m}\,.$$

The latter, when combined with (4.6.15), implies (4.5.17) and (4.5.22) Finally, given the Karhunen-Loève expansion of $\mathbf{Z}_m$, it is routine to prove that the characteristic function of the random variable $\int_0^1 \mathbf{Z}^2_m(t)dt$ are those given in Theorem 2.2 (for $m = 2$) and Theorem 2.3 (for $m \geq 3$). For details, see e.g. Shorack and Wellner (1986) p.212.

4.7 References

Adler, R.J. 1990. An Introduction to Continuity, Extrema, and Related Topics for General Gaussian Processes. IMS Lectures Notes-Monograph Series 12. Institute of Mathematical Statistics, Hayward, California.

Anderson, T.W. and Darling, D.A., 1952. Asymptotic theory of certain goodness of fit criteria based on stochastic processes. Ann. Math. Statist. 23, 193-212.

Anderson, T.W. and Darling, D.A., 1954. A test of goodness of fit. J. Am. Statist.Assoc.,49, 765-769.

Deheuvels, P., 1981. An asymptotic decomposition for multivariate distribution-free tests of independence. J. Multivar. Anal. 11, 102-113.

Deheuvels, P. and Martynov, G., 2002. Karhunen-Loeve expansions for weighted Wiener process and Brownian bridges via Bessel functions. Preprint.

Henze N., and Nikitin Y., 2000. A new approach to goodness of fit testing based on the integrated empirical process. J. Nonparametr. Statist.

Magnus, W., Oberhettinger, F. and Soni,R.P.,1966. Formulas and Theorems for the Special Functions of Mathematical Physics. Springer-Verlag, New-York.

Pettitt A.N., 1976. A two-sample Anderson-Darling rank Statistic, Biometrika 63, 161-168.

Robin, L. 1959. Fonctions Sphériques de Legendre et Fonctions Sphéroïdales. Collection Technique et Scientifique du C.N.E.T. Gauthier-Villars, Paris.

Shorack, G.R. and Wellner, J.A., 1986. Empirical Processes with Applications to Statistics. Wiley, New-York.

Annexe A

Propriétés de quelques fonctions spéciales

A.1 Polynômes de Jacobi, de Gegenbauer, de Legendre et de Tchebitcheff

Pour ces définitions, voir [?] p. 210-211, 231, 257 et [?] chapitre 22.
Pour $\alpha, \beta > -1$, les polynômes de Jacobi de degré k sont définis par

$$P_k^{(\alpha,\beta)}(x) = 2^{-k} \sum_{j=0}^{k} \binom{k+\alpha}{j} \binom{k+\beta}{k-j} (x+1)^j (x-1)^{k-j}. \tag{A.1.1}$$

On obtient comme cas particuliers les polynômes de Gegenbauer en posant, pour $\lambda > -\frac{1}{2}$,

$$G_k^{\lambda}(x) = \frac{\Gamma(\lambda + \frac{1}{2})\Gamma(2\lambda + k)}{\Gamma(2\lambda)\Gamma(\frac{1}{2} + \lambda + k)} P_k^{(\lambda-\frac{1}{2},\lambda-\frac{1}{2})}(x). \tag{A.1.2}$$

Les polynômes de Legendre sont un cas particulier des polynômes de Gengenbauer, le polynôme de Legendre de degré k vérifiant

$$P_k(x) = P_k^{(0,0)}(x) = G_k^{\frac{1}{2}}(x) = \frac{1}{2^k k!} \frac{d^k}{dx^k} \{(x^2-1)^k\}. \tag{A.1.3}$$

Quant au polynôme de Tchebitcheff de seconde espèce de degré k, il est défini par la relation

$$U_k(\cos\theta) = \frac{\sin\{(k+1)\theta\}}{\sin\theta}, \ 0 < \theta < \pi. \tag{A.1.4}$$

A.2 Fonctions de Bessel

Pour les propriétés suivantes voir [?] p. 65. ou [?] p. 358-359. L'équation de Bessel

$$z^2 \frac{d^2w}{dz^2} + z\frac{dw}{dz} + (z^2 - \nu^2)w = 0$$

où $\nu \in \mathbb{C}$ est une constante admet comme solution particulière la fonction de Bessel de première espèce

$$J_\nu(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{z}{2}\right)^{\nu+2k}}{k!\Gamma(\nu+k+1)}.$$

A.3 Fonctions de Legendre

L'équation différentielle

$$(1-z^2)\frac{d^2y}{dz^2} - 2z\frac{dy}{dz} + \left(n(n+1) - \frac{m^2}{1-z^2}\right) = 0 \tag{A.3.5}$$

possède les solutions particulières $\mathcal{B}_n^m$ et $\mathcal{D}_n^m$ dites fonctions de Legendre de première et de seconde espèce respectivement. Lorsque la variable z est dans $(-1,1)$, on note ces fonctions P_n^m (fonction de première espèce) et Q_m^n (fonction de seconde espèce). Elles vérifient donc

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} + \big(n(n+1) - \frac{m^2}{1-x^2}\big) = 0\,, \quad -1 < x < 1. \tag{A.3.6}$$

Une expression explicite de P_n^m est donnée par (4.5.2) p. 113. Pour θ variant dans $(0,\pi)$, les fonctions $P_n^m(\cos\theta)$ et $Q_n^m(\cos\theta)$ sont solutions de l'équation différentielle (voir [?] p. 3, formules (1 bis) et (1 ter)),

$$\frac{d^2y}{d\theta^2} + \cot\theta\frac{dy}{d\theta} + \big(n(n+1) - \frac{m^2}{\sin^2\theta}\big)\, y = 0. \tag{A.3.7}$$

Proposition A.3.1. *Soit $m > 0$ et n tel que $\Re(n) \geq -1/2$. On a un couple de solutions indépendantes de $(A.3.6)$ en prenant*

$$\begin{cases} P_n^{-m}(x) \text{ et } P_n^m(x) & \text{si } m \neq 1,2,..., \\ P_n^{-m}(x) \text{ et } Q_n^m(x) & \text{si } m+n \neq 0 \text{ et } m \neq \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, ... \end{cases} \tag{A.3.8}$$

Pour $N \in \mathbb{N}^*$, toute fonction f de la forme $\sin^{1-\frac{N}{2}}(\theta)Y(\cos\theta)$ avec Y solution de $(A.3.6)$ pour $m = -N/2$ et vérifiant

$$\lim_{\theta\to 0} \sin^{\frac{N-1}{2}}\theta f(\theta) = 0 \tag{A.3.9}$$

est telle que Y est proportionnel à $P_n^{-N/2}(\cos\theta)$. Dans ce cas la fonction $\sin^{\frac{N-1}{2}}\theta f(\theta)$ est C^1 sur $[0,\pi)$ et on a

$$\lim_{\theta\to\pi} \sin^{\frac{N-1}{2}}\theta f(\theta) = 0 \iff n - \frac{N}{2} \in \mathbb{N} \tag{A.3.10}$$

et quand ces conditions sont satisfaites la fonction $\sin^{\frac{N-1}{2}}\theta f(\theta)$ est C^1 sur $[0,\pi]$.

Démonstration On sait ([?], chapitre IV p.62) qu'on obtient deux solutions indépendantes de $(A.3.6)$, quels que soient m et n en prenant

$$\begin{cases} P_n^{-m}(x) \text{ et } P_n^m(x) & \text{si } m \neq 1,2... \\ P_n^{-m}(x) \text{ et } \ Q_n^m(x) & \text{si } m+n \neq 0,-1,-2,... \text{ et } m \neq \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, ... \end{cases} \tag{A.3.11}$$

La restriction $m > 0$ et $\Re(n) \geq -1/2$ faite dans notre hypothèse empêche que $m + n$ soit un entier strictement négatif, et on obtient $(A.3.8)$. Le comportement de ces fonctions en $x = 1$ est donné par les relations $(A.3.20)$, $(A.3.23)$ et $(A.3.24)$. Pour la fonction $\sin^{\frac{N-1}{2}}\theta\sin^{1-\frac{N}{2}} P_n^{-N/2}(\cos\theta) = \sqrt{\sin\theta}P_n^{-N/2}(\cos\theta)$ on obtient en $\theta = 0$ un équivalent en $(\sin\theta)^{(1+N)/2}$ (et alors la fonction $\sin^{\frac{N-1}{2}}\theta f(\theta)$ est bien C^1 sur $[0,\pi)$)

alors que pour $\sqrt{\sin\theta}P_n^{N/2}(\cos\theta)$ et $\sqrt{\sin\theta}Q_n^{N/2}(\cos\theta)$ l'équivalent est en $(\sin\theta)^{(1-N)/2}$. Et les deux cas envisagés pour m et n dans $(A.3.8)$ recouvrent toutes les possibilités puisque $\Re(m+n) \geq -1/2$. Ensuite les relations $(A.3.21)$ et $(A.3.22)$ montrent que $\sqrt{\sin\theta}P_n^{-N/2}(\cos\theta)$ s'annule en $\theta = \pi$ si et seulement si $n - N/2 \in \mathbb{N}$ avec comme en $\theta = 0$ un équivalent en $(\sin\theta)^{(1+N)/2}$. On en déduit que la fonction $\sin^{\frac{N-1}{2}}\theta f(\theta)$ est C^1 sur $[0,\pi]$.

La fin de la proposition en découle. □

Proposition A.3.2. *On a pour m et n entiers positifs ([?] p. 230)*

$$\int_0^1 P_m(x)P_n(x)dx = \begin{cases} 1/(2m+1) & \text{si } m = n, \\ 0 & \text{si } m-n \text{ est pair non nul.} \end{cases} \tag{A.3.12}$$

Proposition A.3.3. *Soient $m \in \mathbb{R}$ et $n \geq -1/2$ tels que $m+n \leq 0$. La fonction P_n^m n'a aucun zéro sur $(-1,1)$ ([?] p. 35).*

Proposition A.3.4. *Soit $m \in (-1,\infty)$ et $k \in \mathbb{N}$. On a*

$$\begin{aligned} P_{m+k}^{-m}(\cos\theta) &= 2^m \frac{k!\Gamma(m+1/2)}{\sqrt{\pi}\Gamma(2m+k+1)} \sin^m\theta G_k^{m+1/2}(\cos\theta)\,, && \text{(A.3.13)} \\ &= \frac{k!}{2^m\Gamma(m+k+1)} \sin^m\theta P_k^{(m,m)}(\cos\theta)\,, \quad 0<\theta<\pi. && \text{(A.3.14)} \end{aligned}$$

De plus ([?], chapitre VI, *formule (158) p. 324),*

$$\int_{-1}^1 P_{m+l}^{-m}(x)P_{m+k}^{-m}(x)dx = \begin{cases} 0, & l \neq k, \\ \frac{2k!}{(2m+2k+1)\Gamma(2m+k+1)}, & k = l. \end{cases} \tag{A.3.15}$$

Enfin, si k et l sont deux entiers positifs ou nuls, de même parité,

$$\int_0^1 P_{m+l}^{-m}(x)P_{m+k}^{-m}(x)dx = \begin{cases} 0, & l \neq k, \\ \frac{k!}{(2m+2k+1)\Gamma(2m+k+1)}, & k = l. \end{cases} \tag{A.3.16}$$

Démonstration La relation $(A.3.13)$ est donnée dans [?], chapitre VI, formule (156) p. 324). On peut la transformer en exprimant le polynôme de Gegenbauer en fonction d'un polynôme de Jacobi, (voir par exemple [?], section 5.3.1 p. 218). Pour $l > -1/2$ et $k = 1,2...$ on a

$$G_k^l(x) = \frac{(2l)_k}{(l+1/2)_k} P_l^{(l-\frac{1}{2},l-\frac{1}{2})}(x).$$

On obtient alors successivement

$$
\begin{aligned}
P_{m+k}^{-m}(\cos\theta) &= 2^m \frac{k!\Gamma(m+1/2)}{\sqrt{\pi}\Gamma(2m+k+1)} \sin^m \theta G_n^{m+1/2}(\cos\theta) \\
&= 2^m \frac{k!\Gamma(m+1/2)}{\sqrt{\pi}\Gamma(2m+k+1)} \sin^m \theta \frac{(2m+1)_k}{(m+1)_k} P_k^{(m,m)}(\cos\theta) \\
&= 2^m \frac{k!\Gamma(m+1/2)}{\sqrt{\pi}\Gamma(2m+k+1)} \sin^m \theta \frac{\Gamma(2m+k+1)}{\Gamma(2m+1)} \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m+1+k)} P_k^{(m,m)}(\cos\theta)
\end{aligned}
$$

et on obtient $(A.3.14)$ grâce à la relation $\Gamma(2m+1) = \pi^{-1/2} 2^{2m} \Gamma(m+1/2)\Gamma(m+1)$. On sait ([?], section 5.3.1 p. 218) que $G_k^{m+1/2}(-x) = (-1)^k G_k^{m+1/2}$. En appliquant $(A.3.13)$ avec $\pi - \theta$ on obtient, pour $x \in (-1,1)$, $P_{m+k}^{-m}(-x) = (-1)^k P_{m+k}^{-m}(x)$. On en déduit $\int_{-1}^0 P_{m+k}^{-m}(x) P_{m+l}^{-m}(x)dx = (-1)^{k+l} \int_0^1 P_{m+k}^{-m}(x) P_{m+l}^{-m}(x)dx$. Si k et l ont même parité, on obtient

$$
\int_{-1}^0 P_{m+k}^{-m}(x) P_{m+l}^{-m}(x)dx = \int_0^1 P_{m+k}^{-m}(x) P_{m+l}^{-m}(x)dx = (1/2) \int_{-1}^1 P_{m+k}^{-m}(x) P_{m+l}^{-m}(x)dx
$$

et $(A.3.15)$ se déduit de $(A.3.15)$. □

Proposition A.3.5. *Soient n un entier strictement positif, $\kappa > 0$ et pour $k = 1, 2, ..,$ les fonctions définies par*

$$
G_{\kappa,n,k}(\theta) = S_\kappa^{1-n/2}(\theta) P_{n/2+k-1}^{-n/2}\{C_\kappa(\theta)\}, \quad 0 < \theta < \pi. \qquad \text{(A.3.17)}
$$

Quels que soient les entiers k et l positifs,

$$
\int_0^{\pi/\sqrt{\kappa}} G_{\kappa,n,k}(\theta) G_{\kappa,n,l}(\theta) S_\kappa^{n-1}(\theta) d\theta = \begin{cases} 0, & l \neq k, \\ \frac{2(k-1)!}{\kappa(n+2k-1)(n+k-1)!}, & k = l. \end{cases} \qquad \text{(A.3.18)}
$$

Si k et l sont des entiers positifs de même parité,

$$
\int_0^{\frac{\pi}{2\sqrt{\kappa}}} G_{\kappa,n,k}(\theta) G_{\kappa,n,l}(\theta) S_\kappa^{n-1}(\theta) d\theta = \begin{cases} 0, & l \neq k, \\ \frac{(k-1)!}{\kappa(n+2k-1)(n+k-1)!}, & k = l. \end{cases} \qquad \text{(A.3.19)}
$$

Démonstration Les calculs donnent, avec le changement de variable $x = C_\kappa(\theta)$ donc $dx = -\kappa S_\kappa(\theta) d\theta$,

$$
\begin{aligned}
\int_O^{\pi/\sqrt{\kappa}} G_{\kappa,n,k}(\theta) G_{\kappa,n,l}(\theta) S_\kappa^{n-1}(\theta) d\theta &= \int_O^{\pi/\sqrt{\kappa}} S_\kappa(\theta) P_{n/2+k-1}^{-n/2}\{C_\kappa(\theta)\} P_{n/2+l-1}^{-n/2}\{C_\kappa(\theta)\} d\theta \\
&= \frac{1}{\kappa} \int_{-1}^1 P_{n/2+k-1}^{-n/2}(x) P_{n/2+l-1}^{-n/2}(x) dx
\end{aligned}
$$

et $(A.3.18)$ découle alors de $(A.3.15)$
De même

$$\int_0^{\frac{\pi}{2\sqrt{\kappa}}} G_{\kappa,n,k}(\theta)G_{\kappa,n,l}(\theta)S_\kappa^{n-1}(\theta)d\theta = \int_0^1 P_{n/2+k-1}^{-n/2}(x)P_{n/2+l-1}^{-n/2}(x)dx$$

et $(A.3.19)$ est une conséquence de $(A.3.16)$. □

Proposition A.3.6. *Soit $m > 0$ et $\Re(n) \geq -1/2$. Alors*

$$P_n^{-m}(\cos\theta) \sim \frac{(1-\cos\theta)^{m/2}}{2^{m/2}\Gamma(m+1)} \textit{ lorsque } \theta \to 0^+, \tag{A.3.20}$$

$$P_n^{-m}(\cos\theta) \sim \frac{2^{m/2}\Gamma(m)(1+\cos\theta)^{-m/2}}{\Gamma(1+n+m)\Gamma(m-n)} \textit{ lorsque } \theta \to \pi^-, \textit{ et } n-m \notin \mathbb{N}, \tag{A.3.21}$$

$$P_{m+k}^{-m}(\cos\theta) \sim (-1)^k \frac{(1+\cos\theta)^{m/2}}{2^{m/2}\Gamma(m+1)} \textit{ lorsque } \theta \to \pi, \textit{ et } k \in \mathbb{N}, \tag{A.3.22}$$

$$P_n^{m}(\cos\theta) \sim \frac{2^{m/2}(1-\cos\theta)^{-m/2}}{\Gamma(1-m)} \textit{ lorsque } \theta \to 0, \textit{ et } m \neq 1, 2\cdots \tag{A.3.23}$$

$$Q_n^{m}(\cos\theta) \sim \frac{2^{m/2-1}\Gamma(m)\cos(m\pi)}{(1-\cos\theta)^{m/2}} \textit{ lorsque } \theta \to 0^+, \textit{ et } m \neq \frac{1}{2}, \frac{3}{2}\cdots \tag{A.3.24}$$

$$Q_n^{-m}(\cos\theta) \sim \frac{2^{m/2-1}\Gamma(m)\Gamma(n-m+1)(1-\cos\theta)^{-m/2}}{\Gamma(n+m+1)} \textit{ lorsque } \theta \to 0^+, \tag{A.3.25}$$

$$Q_n^{-m}(\cos\theta) \sim -\frac{2^{m/2-1}\cos\{(m-n)\pi\}\Gamma(m)\Gamma(n-m+1)(1+\cos\theta)^{-m/2}}{\Gamma(1+n+m)} \textit{ lorsque } \theta \to \pi\cdot \tag{A.3.26}$$

Démonstration Tous ces résultats, excepté $(A.3.22)$, découlent directement du Tableau 4.8.2 p. 197 dans [?]. Quant à $(A.3.22)$, elle est une conséquence de $(A.3.14)$ qu'on peut écrire

$$P_{m+k}^{-m}(\cos\theta) = \frac{k!}{2^m\Gamma(m+k+1)}(1-\cos\theta)^{m/2}(1+\cos\theta)^{m/2}P_k^{(m,m)}(\cos\theta), \quad 0<\theta<\pi$$

et de la relation (voir [?] § 5.2.1 p. 210), valable pour $k \in \mathbb{N}$ et $m > -1/2$,

$$P_k^{(m,m)}(-1) = (-1)^k P_k^{(m,m)}(1) = (-1)^k \binom{k+m}{k} = (-1)^k \frac{\Gamma(m+k+1)}{k!\Gamma(m+1)}.$$

□

Proposition A.3.7. *Soient $m, n \in \mathbb{C}$.*

Si $m+n \neq -1, -3...$ et $m-n \neq 1, 3, ...$ alors ([?], 4.3.2 p. 171)

$$
\begin{aligned}
P_n^{-m}(0) &= \frac{1}{2^m\sqrt{\pi}} \cos\left\{(n-m)\frac{\pi}{2}\right\} \frac{\Gamma(\frac{1+n-m}{2})}{\Gamma(\frac{1+n+m}{2})}, && \text{(A.3.27)}\\
\frac{dP_n^{-m}}{dx}(0) &= \frac{1}{2^{m-1}\sqrt{\pi}} \sin\left\{(n-m)\frac{\pi}{2}\right\} \frac{\Gamma(\frac{1+n-m}{2})}{\Gamma(\frac{1+n+m}{2})}, && \text{(A.3.28)}\\
Q_n^m(0) &= -2^m\sqrt{\pi} \sin\left\{(n+m)\frac{\pi}{2}\right\} \frac{\Gamma(\frac{1+n+m}{2})}{\Gamma(\frac{1+n-m}{2})}. && \text{(A.3.29)}
\end{aligned}
$$

Si $m+n = -2k-1,\ k \in \mathbb{N}$, on a

$$
P_n^{-m}(0) = \frac{1}{2^m\sqrt{\pi}} \cos(k\pi) \frac{\Gamma(\frac{1+2k}{2})}{\Gamma(\frac{1+2k+2m}{2})}. \tag{A.3.30}
$$

Si $m-n = 2k+1,\ k \in \mathbb{N}$ et si de plus $m \neq \frac{1}{2}, \frac{3}{2}...$ alors on a

$$
P_n^{-m}(0) = \frac{1}{2^m\sqrt{\pi}} \cos(k\pi) \frac{\Gamma(\frac{1+2k-2m}{2})}{\Gamma(\frac{1+2k}{2})}. \tag{A.3.31}
$$

Démonstration Pour la deuxième partie de la propriété, pour le calcul de $P_n^{-m}(0)$ on utilise la relation $P_n^{-m} = P_{-n-1}^{-m}$.
Si $n+m = -2k-1$, on a $-n-1 = 2k+m$ et $P_n^{-m}(0) = P_{-n-1}^{-m}(0) = P_{2k+m}^{-m}(0)$. Et puisque $m-(-n-1) = -2k \neq 1, 3..$ et $m+(-n-1) = 2k+2m \neq -1, -3, ...$, on peut appliquer $(A.3.27)$.
Si $n-m = 2k+1$, on a $-n-1 = 2k-m$ et donc $P_n^{-m}(0) = P_{-n-1}^{-m}(0) = P_{2k-m}^{-m}(0)$. Et vu que $m-(-n-1) = 2k+2m \neq 1, 3..$ et $m+(-n-1) = 2k \neq -1, -3, ..$, on peut à nouveau appliquer $(A.3.27)$.

A.3.1 Fonctions coniques de Mehler

Elles sont un cas particulier des fonctions de Legendre. Pour $m, p \in \mathbb{R}$ on obtient une fonction à valeurs réelle en posant (voir [?] § 155 p. 137)

$$
K_p^m = P_{-\frac{1}{2}+ip}^m.
$$

Proposition A.3.8. *Soit $p \in \mathbb{R}$ et $m \in \mathbb{N}$. On a ([?] formule (175) p. 141 et § 156 p. 148)*

$$
K_p^{-m}(\cos\theta) = \frac{1}{m!} \tan^m \frac{\theta}{2} \left\{1 + \sum_{h=1}^{\infty} \frac{\prod_{i=0}^{h-1}\{4p^2 + (2i+1)^2\}}{h! 2^{2h} \prod_{j=1}^{h}(m+j)} \sin^{2h} \frac{\theta}{2}\right\}, \quad \theta \in (0, \pi),
$$

$\int_0^1 K_p^{-m}(x) K_p^m(x) dx < \infty$.

De plus

$$\sin\theta W_\theta\big\{K_p^{-m}(\cos\theta); K_p^{-m}(-\cos\theta)\big\} = -\frac{\cosh(p\pi)}{(p^2+\frac{1}{4})(p^2+\frac{9}{4})\cdots(p^2+\frac{(2m-1)^2}{4})}.$$

Démonstration D'après [?] formule (117) p. 62, le membre de gauche de la dernière égalité vaut

$$\frac{2}{\pi}\frac{(-\frac{1}{2}+ip-m)!}{-\frac{1}{2}+ip+m)!}\sin\{(-\frac{1}{2}+ip-m)\pi\}.$$

On obtient l'égalité attendue en remarquant que $\sin\{(-\frac{1}{2}+ip-m)\pi\} = -(-1)^m\cosh(p\pi)$ et

$$\frac{(-\frac{1}{2}+ip-m)!}{(-\frac{1}{2}+ip+m)!} = \frac{(-1)^m}{(p^2+\frac{1}{4})(p^2+\frac{9}{4})\cdots(p^2+\frac{(2m-1)^2}{4})}$$

d'après [?] formule (214) p. 151. □

A.4 Fonctions Bêta

Les définitions des fonctions Bêta B et I sont données p. 72

Proposition A.4.1. *Pour tout $p>1$, on a*

$$I(p,p,x) = I(p-1,p-1,x) - \frac{\Gamma(2p-2)(1-2x)[x(1-x)]^{p-1}}{(p-1)\,\Gamma(p-1)^2} \tag{A.4.32}$$

Démonstration En utilisant les relations, valables pour $a,b>0$ ([?] formules 26.5.2 et 26.5.16 p.944),

$$I(a,b,x) = 1 - I(b,a,1-x) \text{ et } I(a,b,x) = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}x^a(1-x)^b + I(a+1,b,x)$$

on obtient successivement

$$\begin{aligned}
I(p-1,p-1,x) &= \frac{\Gamma(2p-2)}{\Gamma(p)\Gamma(p-1)}x^{p-1}(1-x)^{p-1} + I(p,p-1,x)\\
&= \frac{\Gamma(2p-2)}{\Gamma(p)\Gamma(p-1)}x^{p-1}(1-x)^{p-1} + 1 - I(p-1,p,1-x)\\
&= \frac{\Gamma(2p-2)}{\Gamma(p)\Gamma(p-1)}x^{p-1}(1-x)^{p-1} + 1 - \frac{\Gamma(2p-1)}{\Gamma(p)^2}(1-x)^{p-1}x^p - I(p,p,1-x)\\
&= \frac{\Gamma(2p-2)}{(p-1)\Gamma(p-1)^2}x^{p-1}(1-x)^{p-1} - \frac{(2p-2)\Gamma(2p-2)x}{(p-1)^2\Gamma(p-1)^2}(1-x)^{p-1}x^{p-1} + I(p,p,x)
\end{aligned} \tag{A.4.33}$$

où pour la dernière égalité on a utilisé l'identité $\Gamma(z) = (z-1)\Gamma(z-1)$. On obtient bien la relation voulue. □

Pour $p = m-1/2$, la relation $(A.4.32)$ s'écrit, compte tenu de $\Gamma(m-1/2) = \pi^{1/2}2^{-2m+2}(2m-2)!/(m-1)!$,

$$\begin{aligned} I(m+\frac{1}{2}, m+\frac{1}{2}, \frac{1-\cos r}{2}) &= I(m-\frac{1}{2}, m-\frac{1}{2}, \frac{1-\cos r}{2}) - \frac{\cos r[\sin^2 r/4]^{m-1/2}\Gamma(2m-1)}{(m-1/2)\Gamma(m-1/2)^2} \\ &= I(m-\frac{1}{2}, m-\frac{1}{2}, \frac{1-\cos r}{2}) - \frac{\cos r \sin^{2m-1} r(2m-2)!(m-1)!^2}{(m-1/2)4^{m-1/2}\pi 4^{-2m+2}(2m-2)!^2} \\ &= I(m-\frac{1}{2}, m-\frac{1}{2}, \frac{1-\cos r}{2}) - \frac{2^{2m-2}(m-1)!^2}{\pi(2m-1)!}\cos r \sin^{2m-1} r \end{aligned}$$

Or vu la Définition (3.0.4) on a

$$I(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1-\cos r}{2}) = \frac{r}{\pi}.$$

On obtient pour tout $m \geq 1$,

$$\begin{aligned} \pi I(m-\frac{1}{2}, m-\frac{1}{2}, \frac{1-\cos r}{2}) &= r - \cos r \sum_{j=2}^{m} \frac{2^{2j-4}(j-2)!^2}{(2j-3)!}\sin^{2j-3} r \\ &= r - \frac{\sin(2r)}{2}\sum_{j=2}^{m} \frac{2^{2j-4}(j-2)!^2}{(2j-3)!}\sin^{2j-4} r \\ &= r - \frac{\sin(2r)}{2} Q_m(\sin^2 r) \qquad (A.4.34) \end{aligned}$$

où Q_m est le polynôme

$$Q_1 = 0, \quad Q_m(x) = \sum_{j=2}^{m} \frac{2^{2j-4}(j-2)!^2}{(2j-3)!} x^{j-2} \quad \text{pour } m \geq 2. \qquad (A.4.35)$$

Bibliographie

Table des matières